MA34B – Estadística
Distribuciones en el Muestreo

Prof. Rodrigo Abt B.
rabt@dim.uchile.cl

Valores muestrales

- Al trabajar con una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$, los valores obtenidos para dichas variables aleatorias se denominan *valores muestrales*.
- Se mencionó que es usual suponer que la distribución F, que rige la población no es del todo desconocida. Esto quiere decir, que se conoce al menos la familia de dsitribuciones a la cual pertenece.
- Si este es el caso, entonces interesará conocer las características desconocidas de dicha distribución.

Estadísticos

- Por ejemplo, si tenemos que $X_1,X_2,\ldots,X_n$ es una m.a.s. de una v.a. X tal que $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, entonces será de interés

  determinar cuanto valen μ y/o σ^2
- Para lo anterior, suponemos que los valores muestrales deberían proporcionar una suerte de "fórmulas" para dar valores a dichos parámetros.
- Podríamos probar distintas funciones $T=T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ para los valores de la muestra.
- Las funciones de los valores muestrales son variables aleatorias denominadas *estadísticos*

Distribuciones en el muestreo

- Obviamente, como T depende de las v.a.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$, entonces T es también una variable aleatoria, y por ende tiene una distribución asociada.
- A las distribuciones de los estadísticos se les denominan *distribuciones en el muestreo*

Estadísticos más frecuentes

En Estadística, los estadísticos más utilizados son:

1. La Media Muestral
2. La Varianza Muestral
3. Estadísticos de Orden
4. Cuantilas

La Media Muestral

- Se define la Media Muestral como:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Propiedades
  - Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m.a.s. de una v.a. X con media μ y varianza σ^2, entonces:
  - Esperanza

$$E(\bar{X}) = \mu$$

  - Varianza

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Nota: Si el muestreo es sin reemplazo en una población de tamaño N, entonces:

$$Var(\bar{X}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

La Varianza Muestral

- Se define la Varianza Muestral como:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- Propiedades
  - Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m.a.s. de una v.a. X con media μ y varianza σ^2, entonces:
  - Esperanza

$$E(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

  - Varianza

$$Var(S_n^2) = \frac{n-1}{n^3}((n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^4)$$

Estadísticos de Orden (1)

Los estadísticos de orden son v.a.s. que resultan del ordenamiento creciente de los valores de la muestra:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

$$\downarrow$$

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(k)}, \ldots, X_{(n)}$$

Estadísticos de Orden (2)

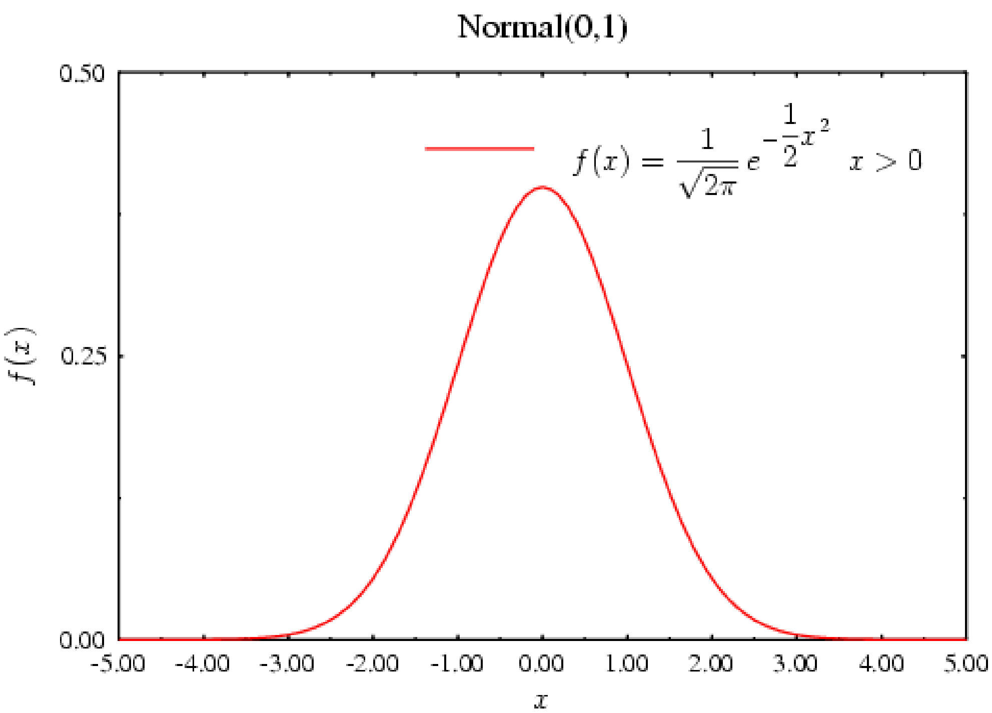
- Los estadísticos de orden más importantes son: $X_{(1)}$, que corresponde a $Min(X_i)$, y $X_{(n)}$ que corresponde a $Max(X_i)$
- Si F(x) es la F.d.a. de X, entonces :
  - La f.d.p. de $X_{(n)}$ es: $nF^{n-1}(x)f(x)$
  - La f.d.p. de $X_{(1)}$ es: $n(1-F(x))^{n-1}f(x)$
  - En general, la f.d.p. de $X_{(k)}$ es:

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x)$$

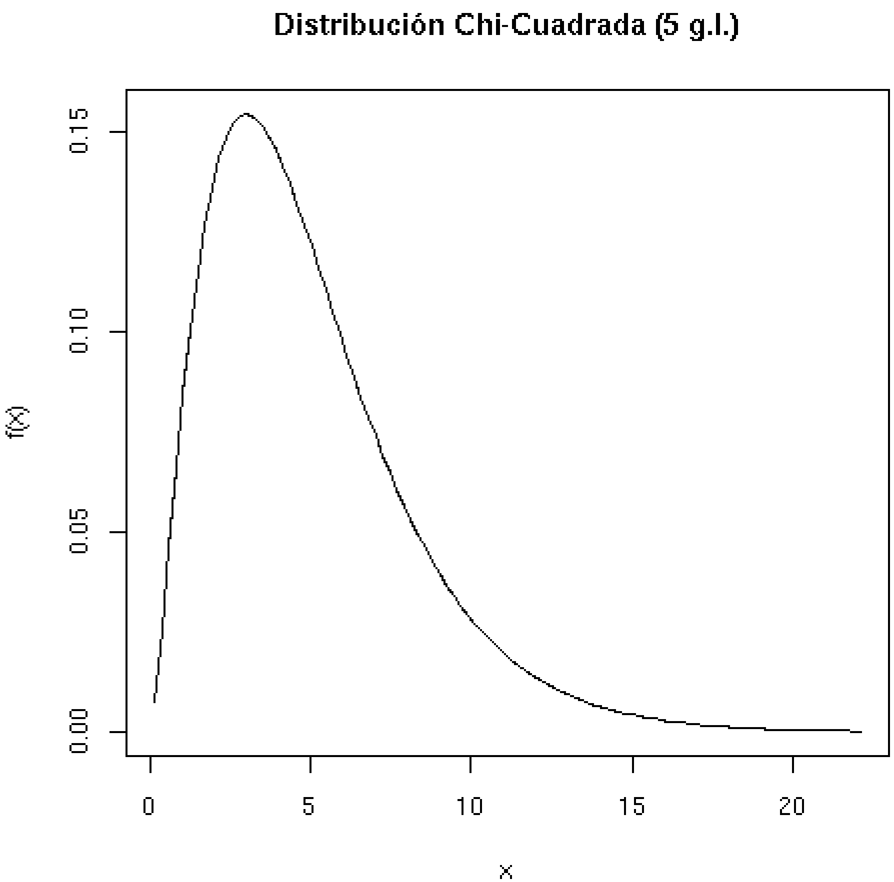
Distribuciones Comunes

- Dentro de las distribuciones en el muestreo más típicas, encontramos las siguientes:
  - Normal
  - Chi-Cuadrado
  - t-Student
  - F-Fisher

Distribución Normal

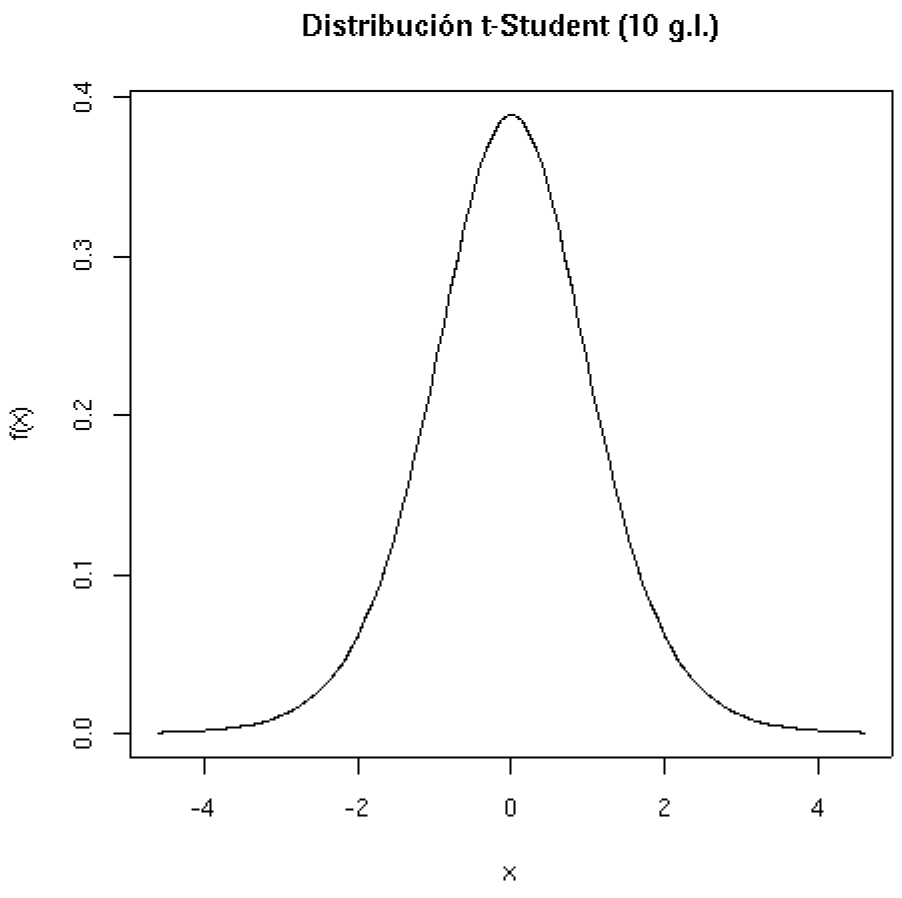


Distribución Chi-Cuadrada

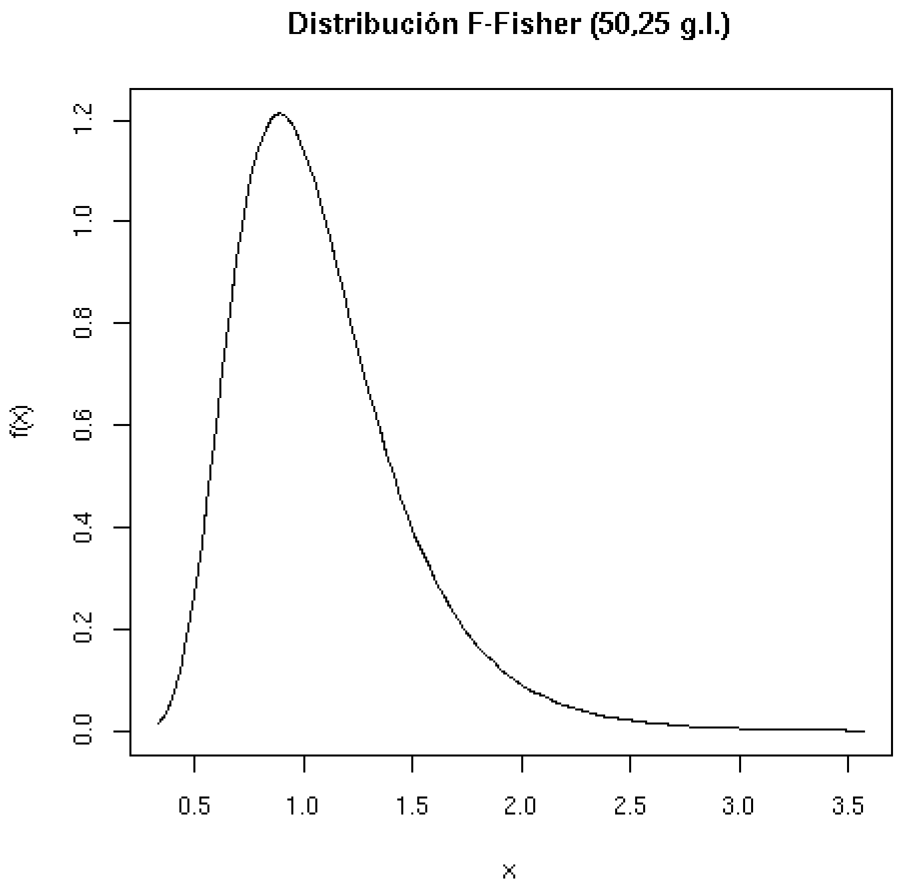


La distribución "Chi cuadrado" con "n" grados de libertad es un caso particular de distribución Gamma de parámetros n/2, 1/2.

Distribución t-Student



Distribución F-Fisher



Ejemplo: Variable Normal

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m.a.s. de una v.a. X con distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$
- Caso 1: Media Muestral

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Caso 2: Varianza Muestral

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

La t-Student

- Otra distribución muestral muy usada en Estadística es la t-Student.
- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.s. i.i.d., entonces la Media Muestral y la Varianza Muestral son independientes ssi $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- Sea

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$V = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- Entonces

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$