

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : Constanza Paredes
: Eduardo Zamora

CONTROL 2

1 DE OCTUBRE DE 2007

1. a) Sea la v.a. X : número de veces que se juega hasta ganar. $X \rightarrow \text{Geom}(p)$.

Saldo $S = G - CX$. $S > 0$ ssi $X \leq \frac{G}{C}$. Sea $N = [\frac{G}{C}]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \geq 0) &= \sum_{k=1}^N p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{N-1} (1-p)^k \\ &= p \frac{1 - (1-p)^N}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^N \\ \mathbb{E}(S) &= G - C\mathbb{E}(X) = G - C\left(\frac{1}{p}\right) = G - \frac{C}{p}\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ pues:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{d}{dp}(1-p)^k \\ &= -p \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1 - (1-p)} \right) = -p \frac{-1}{p^2} = \frac{1}{p}\end{aligned}$$

- b) $\mathbb{P}(\text{falla un día}) = p$. (Independientemente, de lunes a viernes). $p = 0,1$

Sea X : número de días que falla. $X \rightarrow B(5, p)$ Sea U : Utilidad (v.a. discreta).

$$U(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x = 1, 2 \\ -20 & \text{si } x = 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = 5) &= \mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0} 0,1^0 0,9^5 = P_0 \\ \mathbb{P}(U = 2) &= \mathbb{P}(X = 1 \cup X = 2) = \binom{5}{1} 0,1^1 0,9^4 + \binom{5}{2} 0,1^2 0,9^3 = P_1 + P_2 \\ \mathbb{P}(U = -20) &= \mathbb{P}(X = 3 \cup X = 4 \cup X = 5) = \binom{5}{3} 0,1^3 0,9^2 + \binom{5}{4} 0,1^4 0,9^1 + \binom{5}{5} 0,1^5 0,9^0 = P_3 + P_4 + P_5\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(U) = 5P_0 + 2(P_1 + P_2) - 20(P_3 + P_4 + P_5)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^2) &= 25P_0 + 4(P_1 + P_2) + 400(P_3 + P_4 + P_5) \\ \text{Var}(U) &= \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2\end{aligned}$$

2. a) $X \rightarrow U[0,1] \quad Y=H(X) \rightarrow \exp(\lambda)$

$$\lambda \exp(-\lambda y) = f_x(H^{-1}(y)) \left| \frac{dH^{-1}(y)}{dy} \right|. \text{ Supondremos } dH^{-1}(y) < 0$$

$$dH^{-1}(y) = -\lambda \exp(-\lambda y) \Rightarrow X = H^{-1}(y) = \exp(-\lambda y)$$

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(x)$$

Si tomásemos que el módulo de la derivada es positivo, se llega a una contradicción.

b) M: v.a. con distribución mixta, cuyo recorrido es $[100, 10000000]$

$$M(y) = \begin{cases} 100 & \text{si } Y \leq \alpha \\ pY - q & \text{si } \alpha \leq Y \leq 2\alpha \\ 10000000 & \text{si } 2\alpha \leq Y \end{cases}$$

Donde $p = \frac{9999900}{\alpha}$ y $q = 9999800$.

Queremos encontrar las probabilidades de los puntos 100 y 10000000, así como la densidad entre 100 y 10000000.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M = 100) &= \mathbb{P}(Y < \alpha) = \int_0^\alpha \lambda \exp(-\lambda y) dy = 1 - \exp(-\lambda \alpha) \\ \mathbb{P}(M = 10000000) &= \mathbb{P}(2\alpha < Y) = \int_\alpha^\infty \lambda \exp(-\lambda y) dy = \exp(-2\lambda \alpha)\end{aligned}$$

Para la función densidad, dado que la transformación es monótona creciente, se puede usar T.C.V., o bien se puede calcular $F(y)$ y encontrar la distribución derivando.

$$\text{Usando T.C.V.: } f_M(M) = f_y\left(\frac{M-q}{p}\right) \left| \frac{d\left(\frac{M-q}{p}\right)}{dM} \right| = \frac{\lambda}{p} \exp\left(\frac{-\lambda(M+q)}{p}\right)$$

Por lo tanto la variable M tiene la siguiente distribución:

$$\text{dist. } M = \begin{cases} \mathbb{P}(M = 100) = 1 - \exp(-\lambda \alpha) \\ f_M(M) = \frac{\lambda}{p} \exp\left(\frac{-\lambda(M+q)}{p}\right) \\ \mathbb{P}(M = 10000000) = \exp(-2\lambda \alpha) \end{cases} \quad \text{si } 100 \leq M \leq 10000000$$

c) Para que el premio más probable sea la chapita, queremos que la probabilidad de obtener dinero y la probabilidad de obtener un auto sean menores a la probabilidad de obtener la chapita

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{dinero}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{chapita}) - \mathbb{P}(\text{auto}) = \exp(-\lambda\alpha) - \exp(-2\lambda\alpha) \\ \mathbb{P}(\text{chapita}) > \mathbb{P}(\text{dinero}) &\Rightarrow 1 - \exp(-\lambda\alpha) > \exp(-\lambda\alpha) - \exp(-2\lambda\alpha) \\ \mathbb{P}(\text{chapita}) > \mathbb{P}(\text{auto}) &\Rightarrow 1 - \exp(-\lambda\alpha) > \exp(-2\lambda\alpha)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda > \frac{\ln(3)}{2\alpha} \text{ y } \Rightarrow \lambda > \frac{\ln(\frac{3}{2})}{\alpha}.$$

La primera condición es más fuerte, así que los valores pedidos son $\lambda > \frac{\ln(3)}{2\alpha}$

$$\begin{aligned}d) \mathbb{E}(X_j) &= \mathbb{E}_{X_{j-1}}(\mathbb{E}(X_j | X_{j-1} = \bar{x})) \\ \mathbb{E}(X_j | X_{j-1} = \bar{x}) &= \frac{\bar{x}+1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}_{X_{j-1}}\left(\frac{X_{j-1}+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{j-1} + 1) \\ \mathbb{E}(X_1) &= \frac{1}{2}, \mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{4} \dots\end{aligned}$$

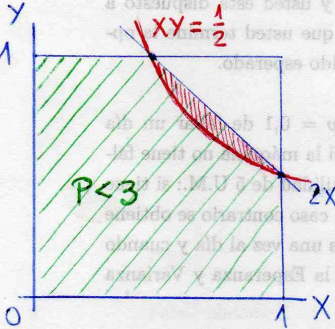
Al desarrollar la recurrencia obtenida se llega a $\mathbb{E}(X_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$

$$\begin{aligned}3. X &\rightarrow U[0, 1] \quad Y \rightarrow U[0, 1] \\ A &= XY, \quad P = 2(X+Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a) \mathbb{E}(A) &= \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} \\ V(A) &= \mathbb{E}(A^2) - \mathbb{E}(A)^2 = \mathbb{E}(X^2Y^2) - \frac{1}{16} = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - \frac{1}{16} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144} \\ \mathbb{E}(P) &= \mathbb{E}(2(X+Y)) = 2(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) = 2, \quad V(P) = V(2(X+Y)) = \\ &= 4(Var(X) + Var(Y)) = 4\left(\frac{2}{12}\right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Para mejor comprensión gráfica y para incluir explicaciones, las siguientes dos partes están resueltas a mano en la siguiente página.

b)

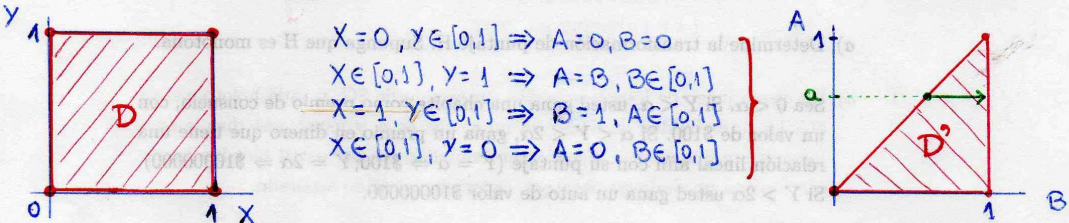


$$P(XY > 1/2 \mid 2X+2Y < 3)$$

$$= \frac{P(XY > 1/2 \wedge 2X+2Y < 3)}{P(2X+2Y < 3)} \rightarrow 1 - P(2X+2Y > 3)$$

$$= \frac{\int_{1/2}^1 \int_{\frac{3}{2-x}}^{\frac{3}{2}-x} 1 \, dy \, dx}{1 - \int_{1/2}^1 \int_{\frac{3}{2}-x}^1 1 \, dy \, dx} = \frac{\frac{8}{7} \int_{1/2}^1 \int_{\frac{3}{2}-x}^{\frac{3}{2}-x} 1 \, dy \, dx}{\frac{8}{7} \int_{1/2}^1 \int_{\frac{3}{2}-x}^{\frac{3}{2}-x} 1 \, dy \, dx} \quad \text{[sin]}$$

c)

$$A = XY \Rightarrow \begin{cases} X = B \\ Y = A/B \end{cases} \quad J = \det \begin{bmatrix} \partial X / \partial A & \partial X / \partial B \\ \partial Y / \partial A & \partial Y / \partial B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/B & -A/B^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{B}$$


$$\left. \begin{aligned} X=0, Y \in [0,1] &\Rightarrow A=0, B=0 \\ X \in [0,1], Y=1 &\Rightarrow A=B, B \in [0,1] \\ X=1, Y \in [0,1] &\Rightarrow B=1, A \in [0,1] \\ X \in [0,1], Y=0 &\Rightarrow A=0, B \in [0,1] \end{aligned} \right\}$$

$$f_{AB}(a,b) = f_{XY}(b, a/b) \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \quad \forall (a,b) \in D'$$

$$f_A(a) = \int_a^1 \frac{1}{b} \, db = \ln b \Big|_a^1 = \ln 1 - \ln a = -\ln a \quad \forall a \in [0,1]$$

$$\int_0^1 -\ln a \, da = - \int_0^1 \ln a \, da = - [a \ln a - a]_0^1 = - [0 \ln 0 - 0 + 1 \ln 1 - 1] = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1/a}{-1/a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} -a^2 = 0$$