



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor : Fernando Lema

Auxiliares

: Constanza Paredes
Eduardo Zamora

Tarea 2

(entrega: Lunes 12 de Mayo de 2008, al comienzo del control)

Problema 1

Sean X, Y v.a.'s discretas independientes.

- a) Si $X \rightarrow \text{Geom}(p)$ e $Y \rightarrow \text{Geom}(p)$, calcule $IP(X = m | X + Y = n)$.

Indicación: Calcule $IP(X + Y = j)$ para un j genérico.

- b) Si $X \rightarrow \text{Bin}(n, p)$ e $Y \rightarrow \text{Bin}(m, p)$, calcule $IP(X = j | X + Y = k)$.

Indicación:
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Problema 2

Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10 [um] c/u. Las siguientes cuestan 5 [um] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0.9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

Problema 3

Se dice que una v.a. X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0, α (ambos mayores que cero) si su función densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq X_0 \\ 0 & x < X_0 \end{cases}$$

- a) Calcule $IE(X)$ y $\text{Var}(X)$.
b) Si $Y = \ln(X / X_0)$, determine la densidad de Y .
c) Considere que X representa el ingreso mensual (en miles de \$) de un grupo de individuos, con $X_0=200$ y $\alpha=2$. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.
d) Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste del 10% mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la v.a. "monto de reajuste".

Problema 4

Un vehículo se ubica sobre una pista circular de radio R , y la distancia D que puede recorrer antes de detenerse es una v.a. tal que $D \rightarrow \text{Exp}(\lambda)$.

- a) Calcule la densidad de la v.a. $\theta \in [0, \infty) [rad]$ que denota la posición angular en que queda el vehículo una vez que se detiene.
- b) Calcule la probabilidad que el vehículo quede a una distancia angular inferior a $\alpha [rad]$ del punto de partida ($\alpha \in [0, \pi]$).
- c) Calcule e interprete el resultado de la parte b) cuando $\lambda R \rightarrow 0$ y cuando $\lambda R \rightarrow \infty$.

Problema 5

- a) Sea X v.a. discreta de recorrido $R \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$. Pruebe que:

$$IE(X) = \sum_{k=0}^{\infty} IP(X > k)$$

- b) Sea X v.a. continua con densidad $f_X(x) = 0$ si $x < 0$. Pruebe que:

$$IE(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$$

- c) Sean X, Y v.a.'s absolutamente continuas e independientes. Pruebe que:

$$IP(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$$

Problema 6

Suponga que la duración X de un equipo en horas es una v.a. $\text{Exp}(\lambda)$, es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en $t = 0$, pero el operario (por flojera) solo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo fallado anteriormente se le asigna t_1 horas. También por flojera, el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) esté bueno, se le asigna t_2 horas.

- a) Determine la distribución de la v.a. Y “duración definida por el operario”. Calcule $IE(Y)$.
- b) Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya sido inspeccionado realmente. Determine la distribución de la v.a. Z “nueva duración definida por el operario”.
- c) (Las v.a.'s Y, Z ahora son distintas de las anteriores, X es la misma). Si $Y \rightarrow \text{Exp}(\alpha)$ independiente de X , calcule $IP(Y \geq kX) \forall k \in \mathbb{N}$.
- d) Determine la densidad de $Z = X + Y$.

Problema 7

En un banco se ha determinado que los clientes piden préstamos por una cantidad aleatoria X de [um] con una distribución:

$$IP(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad k=1, 2, 3...$$

Por otro lado, se ha realizado un estudio que indica que una persona pagará una proporción Y de lo que solicitó ($X = k$), con densidad:

$$f_Y(y) = (k+1)y^k \quad 0 < y < 1$$

Un cliente es clasificado como seguro si paga más de $4/5$ de lo solicitado.

- Calcule la probabilidad que un cliente que pidió k [um] sea seguro.
- Si un cliente es seguro, calcule la probabilidad que haya pedido 2 [um].

Problema 8

Un plano está dividido en rectas paralelas separadas una distancia L_1 una de otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo L_2 que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en $L_1 = 2L_2$, $L_1 = L_2$ y $L_1 = L_2/2$. ¿Qué ocurre si $L_2 \gg L_1$ ($L_2 \rightarrow \infty$)? ¿Calza su cálculo con la lógica?

Indicación: debe notar que los casos $L_1 < L_2$ y $L_1 > L_2$ son distintos, fijándose bien en qué dominio están definidas las variables que use para resolver el problema.

Problema 9

De un mazo de naipes se sacan 2 cartas sin reposición, definiendo el vector (X, Y) como X : n° de monos obtenidos, Y : n° de ases obtenidos.

- Determine la distribución de probabilidades de (X, Y) .
- Determine las distribuciones marginales de X e Y . Calcule $IE(X)$ y $IE(Y)$.
- Determine la distribución condicional de X dado $Y = y$, y la distribución condicional de Y dado $X = x$.
- Determine la distribución de probabilidades de $M_1 = \max(X, Y)$ y de $M_2 = \min(X, Y)$.

Problema 10

Una fuente luminosa de intensidad I produce una luminosidad $L = I / R^2$ en un punto ubicado a distancia R . Suponga que I y R son v.a.'s independientes con $I \rightarrow U(1, 2)$ y $R \rightarrow \text{Exp}(1)$.

- Calcule $IP(L > 1 \mid I > 1.5)$.
- Usando T.C.V. determine la densidad de L .
- Calcule la iluminación promedio de los puntos ubicados a 2 unidades de distancia.

Problema 11

La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de distancia de un cable con corriente I queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

- a) Si $X \rightarrow U(2, 4)$ e $I \rightarrow U(10, 20)$, determine la densidad de H suponiendo que X e I son independientes.
- b) Calcule $IP(H > 10 \mid X < 3)$.
- c) Calcule $IE(H \mid X = 3)$ y $IE(H \mid X < 3)$.

Problema 12

Sean X e Y v.a.'s independientes con densidades:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y^2/2} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

- a) Calcule $IE(X)$, $IE(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$.
- b) Encuentre la densidad de $Z = XY$.

Problema 13

La duración de una máquina es una v.a. $T \rightarrow \text{Exp}(\alpha)$ en horas. La máquina tiene costos de funcionamiento C_1 [um] por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de C_2 [um] por hora. Para operar, la máquina requiere un especialista que cobra C_3 [um] por hora y exige ser contratado por un n° prefijado de horas H . El pago del especialista es independiente de si la máquina está funcionando o no.

- a) Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.
- b) Determine H de forma de maximizar la utilidad esperada.
- c) Suponga $\alpha = 0.01$, $C_1 = 6$, $C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y $H = 60$ (no es el de la parte b)). Determine la distribución de probabilidades de la v.a. U .