Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor : Fernando Lema Auxiliares : Constanza Paredes
Eduardo Zamora

Tarea 1

(entrega: Lunes 14 de Abril, al comienzo del control)

Problema 1

a) Suponga que $\{A_1,... A_n\}$ es una partición de Ω, y $B \subseteq \Omega$ tal que $IP(B) > 0$. Muestre que si $IP(A_1|B) < IP(A_1)$ entonces $\exists\, i \in \{2... n\}$ tal que $IP(A_i|B) > IP(A_i)$.

b) Sea $\{B_1,... B_n\}$ una familia de eventos mutuamente excluyentes, tales que $IP(B_i) > 0$ $\forall\, i \in \{1,2... n\}$. Sea A un evento que cumple que $IP(A|B_i) = p$ $\forall\, i \in \{1,2... n\}$ y B el evento tal que $B = \bigcup_{i=1}^{n}(B_i)$. Pruebe que $IP(A|B) = p$.

c) Sean A, B, C subconjuntos del espacio muestral Ω y suponga que se satisface la desigualdad: $0 < IP(B \cap C) < IP(B)$. Pruebe que $0 < IP(B \cap C^c) < IP(B)$ y que:

$$IP(A|B) = IP(A|B \cap C)IP(C|B) + IP(A|B \cap C^c)IP(C^c|B)$$

Problema 2

Considere un juego de póker en que se reparten 5 cartas de un mazo inglés de 52 cartas (sin comodines). Calcule la probabilidad de obtener:

a) Par (exactamente un par de números iguales).
b) Doble par (2 pares).
c) Trío (3 n°s iguales).
d) Escalera (5 n°s consecutivos, sin importar la pinta).
e) Color (5 naipes de igual pinta).
f) Póker (4 naipes de igual número)

Problema 3

a) Determine el número de igualdades que deben verificarse para probar que el conjunto $\{A_1,... A_n\}$ es una familia de eventos independientes.
b) Sea un conjunto S con n elementos del cual extraemos (con reposición) 2 subconjuntos A y B. Asuma que la extracción de cualquier subconjunto de S es equiprobable. Calcule $IP(AUB=S)$.

Problema 4

Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa, cargando el revólver, cuya nuez tiene capacidad para 6 municiones, con una bala. Antes de iniciar el juego giran la nuez.

a) Si se va disparando cada vez sin girar la nuez, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado.

b) Si ahora después de cada intento se vuelve a girar la nuez, calcule la probabilidad que el jugador que comienza muera. Indique el espacio muestral.
c) Considere la modalidad de juego descrita en b), pero para un revólver con capacidad n y con b balas (b<n). Calcule la probabilidad que el primer jugador muera. ¿Existe alguna forma que este juego sea justo?

Problema 5

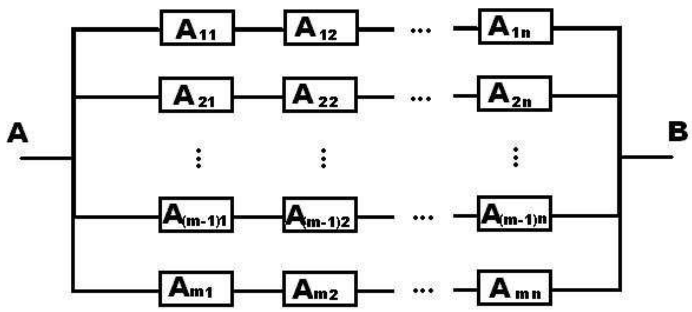
Suponga un trazado rectangular de calles ABCD, de N por M cuadras, y que una persona ubicada en la esquina A desea llegar a la esquina C.

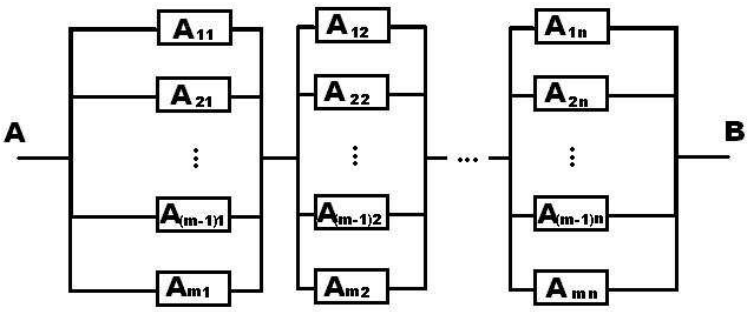
a) ¿Cuántos caminos inteligentes existen entre ambos puntos (camino inteligente se entenderá por aquel que sólo consta de desplazamientos que lo acercan al destino).
b) Considere M = N. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal BD, calcule $\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k}^2$.

Nota: En todo el problema considere que las calles no terminan dentro del cuadriculado, o sea, todo camino inteligente es susceptible de ser realizado.

Problema 6

Considere los circuitos:





Las componentes A_{jk} tienen una probabilidad p de funcionar ((1-p) de fallar) y lo hacen en forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

Problema 7

En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas. Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso con igual probabilidad y sin importar lo que haga el resto de los pasajeros, calcule la probabilidad que:

a) m_1 personas bajen en el 1° piso, m_2 en el 2°,... m_n en el n-ésimo, donde $m_i \in \{0, 1,... m\}$ $\forall$ i$\in$ {1,... n} y $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$.
b) Todas las personas se bajen en pisos diferentes.
c) Determine el número de formas en que pueden bajarse las m personas si:
   i) Las personas son distinguibles.
   ii) Las personas son indistinguibles (clones).

Problema 8

Considere la ecuación $\sum_{k=1}^{n} x_k = r \qquad r \in IN \qquad n \in IN - \{0\}$

a) Demuestre por inducción que el número de soluciones enteras no negativas de esta es: $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$. Asocie e interprete con un resultado ya conocido por Ud.
b) Encuentre una expresión para la cantidad de soluciones enteras no negativas de la ecuación:
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 30$$
HINT: Use la parte a) para la ecuación:
$$x_1 + x_2 + x_3 = 30 - 2x_4 - 3x_5$$
y sume sobre los valores posible de x_4 y x_5.
c) Ud. debe pagar una cuenta de \$40000 y dispone de suficientes billetes de \$1000, \$5000, \$10000 y \$20000 como para pagar con cualquier combinación. ¿De cuántas formas puede pagarla? Si cada combinación es equiprobable ¿con qué probabilidad se usan billetes de \$5000?

Problema 9

Para predecir el tiempo un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p.

a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β muestre que la probabilidad que el n-ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) es:
$$P_n = [\,(\beta - 1/2)\,(2p-1)^{n-1}\,] + 1/2$$
b) Si el 16 de abril está seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Considere $\beta = 1$, p = 9/10

Problema 10

La restricción vehicular normal consiste en la designación de 2 dígitos (último dígito en patentes de vehículos) que no pueden circular un día determinado de la semana.

a) ¿De cuántas maneras se podría programar la restricción vehicular para una semana? Plantee el espacio muestral utilizado.

b) Si la restricción es programada al azar, ¿cuál es la probabilidad que el día lunes queden dígitos consecutivos?, ¿cuál es la probabilidad que todos los días queden dígitos consecutivos?
c) Si Ud. tiene 5 vehículos con patente terminada en dígitos todos distintos, calcule la probabilidad que todos los días quede un vehículo con restricción.

Problema 11

Cierta enfermedad congénita se transmite a la descendencia de modo que si uno de los padres presenta el gen T, cada hijo tiene probabilidad α de enfermar si este proviene del padre, y β si este viene de su madre. Si ambos presentan el gen, es seguro que enfermará. Por otro lado se sabe que la enfermedad no aparece espontáneamente y que cada padre tiene probabilidad p de presentar el gen (independientemente).

a) Si una persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad que la enfermedad haya sido transmitida solo por la madre?
b) Suponga que la persona de la parte a) tiene un hermano (con el mismo padre y la misma madre). Calcule la probabilidad que esté enfermo si se sabe que su hermano lo está.

Problema 12

Cuando una máquina productiva está correctamente ajustada produce el 80% de los artículos de alta calidad y el resto de calidad media, en cambio cuando la máquina está mal ajustada sólo produce el 40% de alta calidad. Suponga que el 30% de los días la máquina está mal ajustada.

a) Se escogen 3 artículos producidos un día cualquiera encontrándose 2 de alta calidad y 1 de calidad media. Calcule la probabilidad que ese día la máquina estuviera correctamente ajustada.
b) Bajo el mismo enunciado original, suponga que ahora un operario revisa todos los artículos sacando los de calidad media según su parecer. Si un artículo es de alta calidad existe una probabilidad de 0.05 que el operario lo considere de calidad media, en cambio, si es de calidad media lo detecta con probabilidad 0.9. Los artículos puestos a la venta son aquellos catalogados de alta calidad por el operario. Si un artículo es comprado por un cliente que reclama diciendo que le vendieron un artículo de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que tenga razón?

Problema 13

Suponga que el juego de dados del casino se juega con dados de 4 caras y tiene las siguientes reglas:

- Usted lanza indefinidas veces un par de dados hasta que gane o pierda, dependiendo de la suma de los dados.
- En el primer lanzamiento usted gana si obtiene 3 o 7 y pierde si obtiene 2, 5 u 8. Si usted obtiene 4 o 6, este se convierte en su número base.
- Para cualquier otro lanzamiento, usted gana si obtiene su número base y pierde si obtiene 3 o 7. De otra forma sigue lanzando.

a) Calcule la probabilidad de no perder en el primer lanzamiento.
b) Si usted ganó en el 2° lanzamiento, calcule la probabilidad que su número base haya sido el 6.
c) Calcule la probabilidad de ganar en este juego.