CLASE AUXILIAR 27/06/08

ANDRÉS ITURRIAGA J.

Problema 1:

El ingreso mensual de las personas X puede considerarse una variable aleatoria producto de muchas variables aleatorias independientes entre si (por ejemplo sexo, edad, educación, etc.), es decir, $X = X_1 X_2 \dots X_n$ con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ y $\mathbb{V}ar(X_i) = \sigma_i^2$. Supongamos que la ley de cada variable X_i es conocida. Determine, para n grande, la densidad de X.

Problema 2:

Sean $(X_i)_1^\infty$ v.a.i.i.d. con esperanza μ desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$. Se define $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$. En este problema queremos diseñar una estrategia para confirmar o rechazar la hipótesis de que la esperanza de estas variables es μ_0 (un valor real conocido).

1. Calcule $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ en función de μ y $\mathbb{V}ar(\overline{X}_n)$.
2. Si $\mu = \mu_0$ y $c > 0$, justifique que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu_0| \geq c) = 0$$
3. Suponga ahora que las variables X_i son normales, que $n = 100$, y que $\mu = \mu_0$. Encontrar el menor valor $c > 0$ tal que
$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu_0| \geq c) \leq 0{,}1$$
Indicación: Si Z sigue $Normal(0,1) \Rightarrow \mathbb{P}(Z \leq 1{,}64) = 0{,}95$.
4. Uno rechaza la hipótesis que $\mu = \mu_0$ con probabilidad 0,1 cuando $|\overline{X}_n - \mu_0| \geq c$. Proponga un método para confirmar o rechazar la hipótesis $\mu = \mu_0$ cuando las variables aleatorias X_i no son necesariamente normales como en el punto anterior. Justifique.

Problema 3:

(Problema de la Ruina del Jugador) Dos jugadores, A y B, apuestan al lanzamiento de una moneda. En cada tirada, si la moneda sale cara, A gana 1 unidad. En caso contrario, es decir, si sale sello, entonces pierde 1 unidad. El juego continua hasta que uno de ellos pierde todo. Suponga la probabilidad que salga cara igual a p. Analice la posibilidad de modelar la situación anterior mediante una Cadena de Markov homogenea y calcule la probabilidad que A termine con todo el dinero si comienza con i unidades y B con $N - i$ unidades.