CLASE AUXILIAR 20/06/08

ANDRÉS ITURRIAGA J.

Problema 1:

Sean T_1 y T_2 variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Demuestre, usando esperanza condicional, que

$$P[T_1 < T_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Problema 2:

A una tienda llegan N clientes, digamos $1, 2, \ldots, N$, que compran cantidades $X_1, X_2, \ldots$ Supongamos que N es una variable aleatoria que toma los valores $1, 2, \ldots$ con prob. $p_N(n) = p_n$. Supongamos que los X_i son variables aleatorias independientes de N, cada una con esperanza $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ finita. La compra total del día se escribe como:

$$Y = \sum_1^N X_i$$

Calcular

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_1^N X_i]$$

Obs.: Aquí no se puede aplicar la linealidad de la esperanza, porque hay un número aleatorio de sumandos.

Problema 3:

A menudo de necesita estimar la dispersión de una variable aleatoria X cuya media y varianza se saben finitas, pero son desconocidas. Para ello es usual obtener de manera independiente varios valores (o realizaciones) de la variable aleatoria, digamos $X_1, \ldots, X_n$, y estimar $\sigma^2 \equiv Var(X)$ por

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \hat{\mu_n})^2, donde\ \hat{\mu_n} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i$$

1. Si $\mu = \mathbb{E}[X]$ observe que $(X_i - \hat{\mu}_n)^2 = ((X_i - \mu) - (\hat{\mu}_n - \mu))^2$ y pruebe que

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \mu)^2 - (\hat{\mu}_n - \mu)^2$$

2. Justifique la elección del estimador $\hat{\sigma}_n^2$ estableciendo que

$$P(\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2) = 1$$