Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA34A-03: Probabilidades y Procesos Estocásticos
Profesor Raúl Gouet B.
Semestre Otoño, 2008

PROBLEMAS RESUELTOS DE ESPERANZA CONDICIONAL

ANDRÉS ITURRIAGA J.

Problema 1:

Una mosca se desplaza en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera. Parte de un punto arbitrario, que consideraremos el centro de nuestro sistema de referencia (ver figura) y camina a lo largo del eje positivo de las abscisas una distancia X aleatoria, con ley uniforme en $[0, a]$. Luego, en ángulo Θ (medido con respecto al eje X) avanza en linea recta una distancia b. Suponiendo que Θ es una variable aleatoria uniforme en $[0, \frac{\pi}{2}]$, independiente de X, calcule:

1. Probabilidad que la mosca cruce la linea de ecuación $x = a$, cuando $a \geq b$.
2. Probabilidad que la mosca cruce la linea de ecuación $x = a$, cuando $a < b$.

Solución:

1.

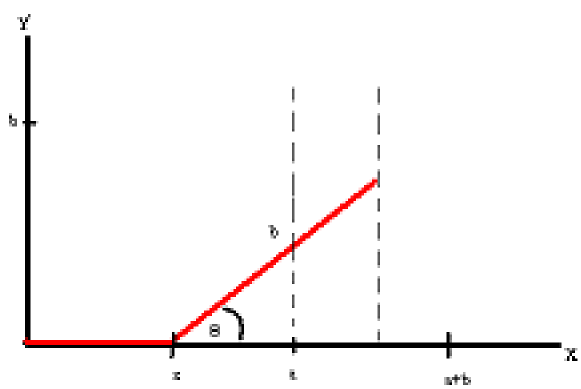

FIGURA 1. Desplazamiento del insecto

Definamos la variable aleatoria $Y = X + b\cos(\Theta)$. Luego, tenemos que calcular:

$$P[Y \geq a] = \int_{\mathbb{R}} P[Y \geq a | \Theta = \theta] f_{\Theta}(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P[X + b\cos(\Theta) \geq a | \Theta = \theta] d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P[X + b\cos(\theta) \geq a | \Theta = \theta] d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P[X \geq a - b\cos(\theta) | \Theta = \theta] d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P[X \geq a - b\cos(\theta)] d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\cos(\theta)}{a} d\theta = \frac{2b}{\pi a}$$

Observemos que $P[X \geq a - b\cos(\theta)]$ esta bien definida dado que $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $a - b\cos(\theta) \geq 0$, pues $a \geq b$.

2. Notemos ahora que si $\theta = 0$, entonces $b\cos(\theta) = b > a \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow P[X \geq a - b] = 1$. Luego, sea $\hat{\theta}$ tq $b\cos(\hat{\theta}) = a$. Asi:

$$P[Y \geq a] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\hat{\theta}} P[X \geq a - b\cos(\theta)] d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\hat{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} P[X \geq a - b\cos(\theta)] d\theta = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_{\hat{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} P[X \geq a - b\cos(\theta)] d\theta.$$

Y finalmente, $P[Y \geq a] = \frac{2}{\pi} + \frac{2b}{\pi a}(1 - \mathrm{sen}(\hat{\theta}))$.

Problema 2:
A una tienda llegan N clientes, digamos 1,2,..., N, que compran cantidades X_1, X_2, ... de mercadería. Supongamos que N es una variable aleatoria que toma valores 1,2,... con probabilidad $P_N(n) = P[N = n]$. Supongamos que los X_i son variables aleatorias independientes de N, cada una con esperanza $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ finita. La compra total del día se escribe como

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Calcule:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i]$$

Solución: Notemos que acá no se puede aplicar la propiedad de linealidad de la suma de variables aleatorias asi como asi, pues el número de sumandos es una variable aleatoria.

$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N]] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N = n]P[N = n] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i|N = n]P[N = n]$.

Ahora como la suma de funciones medibles es medible, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es independiente con X_i. Asi:

$E[\sum_{i=1}^{n} X_i|N = n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n\mathbb{E}[X_1] = n\mu$, y finalmente:

$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{E}[X_1]P[N = n] = \mu \sum_{n\in\mathbb{N}} nP[N = n] = \mu\mathbb{E}[N]$