GUIA #10 DE EJERCICIOS RESUELTOS DE PROBABILIDAD

MA-34A Prof. R. Gouet, 13/06/08

1. Considere un rectángulo cuyos lados X, Y son variables aleatorias independientes, exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean Z el perímetro del rectángulo y Θ el ángulo que forma la diagonal con el lado mayor. Verifique que Z y Θ son variables aleatorias independientes. Indicación: Note que Θ sólo es función de $U = X/Y$ e intente un cambio de variables.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes normales, de parámetros $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Muestre que la v.a. $X_1^2 + \ldots + X_n^2$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ tiene ley gama de parámetros $\lambda = 1/2$ y $p = n/2$ (χ^2 (chi cuadrado) con n grados de libertad). Indicación: demuestre el resultado por inducción sobre n, para lo cual requiere poco más que un cambio de variable en $\mathbb{R}^2$. Alternativamente, si prefiere, puede usar la función generadora de momentos.

3. Sean X, Y variables aleatoria gama independientes, de parámetros respectivos (λ, p) y (λ, q), donde $\lambda, p, q > 0$.
   (i) Muestre que la función generadora de momentos de X está dada por
   $$\psi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^p, \quad t < \lambda.$$
   (ii) Use (i) para probar que $X + Y$ tiene ley gama de parámetros $(\lambda, p + q)$.
   Indicaciones: Una v.a. gama de parámetros (λ, p) tiene densidad de probabilidad $f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{p-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}$. La función generadora de momentos de una v.a. X se define como $\psi_X(t) = E(e^{tX})$.

4. Dos amigas A y B van de compras y llegan a la tienda independientemente, en instantes distribuidos uniformemente entre las 9 AM y las 10 AM. Suponga que A permanece 10 minutos y B 15, cuando no se encuentran. Sin embargo, si ambas se encuentran, la que debe irse antes espera a que la otra amiga complete el tiempo que habría permanecido si estuviera sola. Se sabe A y B gastan g_A y g_B pesos por minuto, cuando están solas, pero mientras están juntas, gastan el doble. Calcular
   (a) Probabilidad de que las amigas se encuentren
   (b) $E(T_A)$ y $E(T_B)$, donde T_A y T_B son los tiempos respectivos de permanencia de A y B.
   (c) Calcule $E(G)$, donde G es la suma de los gastos de A y B.

5. Sean X, Y v.a. independientes $N(\mu, \sigma^2)$ y $N(\nu, \sigma^2)$ respectivamente.

(a) Muestre que las v.a. $X-Y-\mu+\nu$ y $X+Y-\mu-\nu$ son $N(0,2\sigma^2)$ independientes.

(b) Obtenga la ley (densidad) de la v.a.

$$V = \frac{X-Y-\mu+\nu}{X+Y-\mu-\nu}.$$

6. Se escogen dos puntos al azar e independientemente en una barra de largo L, determinándose tres segmentos: izquierda, centro y derecha. Calcule la densidad de probabilidad del largo del segmento central.

7. Una barra de largo L se rompe al azar en 2 puntos X e Y, que podemos suponer escogidos independientemente, con ley uniforme en el intervalo $[0, L]$. Calcule la probabilidad de que pueda construirse un triángulo con los segmentos obtenidos.

8. Sea N una v.a. de Poisson de parámetro λ. Suponga que se observa N y luego se hacen tantos lanzamientos independientes de una moneda cargada (con probabilidad de cara p) como indica el valor de N. Sea M la v.a. correspondiente al número de caras obtenidas. Muestre que M tiene ley de Poisson con parámetro λp. Indicación: considere la ley condicional $M|N$ y utilice la regla de probabilidades totales.

9. Sean X e Y variables aleatorias absolutamente continuas, con densidad conjunta $f(x,y) = (1+xy(x^2-y^2))/4$, para $|x|, |y| \leq 1$ y $f(x,y) = 0$ en otro caso. Determine la densidad de probabilidad de $Z = X+Y$.

10. Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, cada una con densidad $f(x) = 4x-3x^2, 0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso. Sea $Y = X_1^2 - X_2$. Calcule

    (a) $E(Y)$

    (b) $V(Y)$

    (c) $P(Y \geq 0)$

11. Sean X e Y variables aleatorias absolutamente continuas, con densidad conjunta $f(x,y) = Ke^{-\max\{x,y\}}$, para $x, y \geq 0$ y $f(x,y) = 0$ en otro caso.

    (i) Calcule la constante K apropiada y determine las densidades marginales de$X$ e Y.

    (ii) Calcule la función de densidad de $Z = \max\{X, Y\}$.

SOLUCIONES

1. Basta demostrar que Z y U son independientes ya que el ángulo Θ se relaciona con U a través de $\tan\Theta = \min\{U, 1/U\}$, es decir $\Theta = h(U)$. Para verificar la independencia

hacemos el cambio de variable de (X,Y) a (Z,U), es decir $Z = 2(X+Y), U = X/Y$. La inversa de la transformación se obtiene fácilmente "despejando" X e Y como $X = \frac{ZU}{2(U+1)}$, $Y = \frac{Z}{2(U+1)}$. Para obtener el (valor absoluto del determinante del) Jacobiano, $J(z,u)$, calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{u}{2(u+1)}, \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{z}{2(u+1)^2}, \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2(u+1)}, \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-z}{2(u+1)^2}.$$

Obtenemos entonces, $J(z,u) = \frac{z}{4(u+1)^2}$. Finalmente,

$$f_{Z,U}(z,u) = f_{X,Y}\left(\frac{uz}{2(u+1)}, \frac{z}{2(u+1)}\right) J(z,u) = e^{-\frac{uz}{2(u+1)} - \frac{z}{2(u+1)}} \frac{z}{4(u+1)^2}.$$

O bien,

$$f_{Z,U}(z,u) = \frac{z}{4} e^{-\frac{z}{2}} \frac{1}{(u+1)^2}, z \geq 0, u \geq 0.$$

Integrando con respecto a z y a u obtenemos las densidades marginales respectivas

$$f_U(u) = \frac{1}{(u+1)^2}, u \geq 0, \quad f_Z(z) = \frac{z}{4} e^{-\frac{z}{2}}, z \geq 0.$$

Concluimos que ambas variables son independientes porque se verifica la condición (necesaria y suficiente) para la independencia: $f_{Z,U}(z,u) = f_Z(z) f_U(u), \forall z, u$. Finalmente, por resultado visto en clase, sabemos que Z independiente de U implica Z independiente de $\Theta = h(U)$.

2. Usemos la inducción, tal como se sugiere. Para ello hay que probar que el resultado es cierto para $n = 1$ y que el caso n implica el caso $n+1$. El caso $n = 1$ equivale a mostrar que si X es normal $N(0,1)$ entonces X^2 tiene ley gama de parámetros $\lambda = 1/2, p = 1/2$. La implicancia de n a $n+1$ equivale a demostrar que si U tiene ley gama de parámetros $\lambda = 1/2, p = 1/2$ y V, independiente de U, tiene ley gama parámetros $\lambda = 1/2, p = n/2$, entonces $U + V$ tiene ley gama de parámetros $\lambda = 1/2, p = (n+1)/2$. Pero esto último es consecuencia directa de la propiedad que se presenta en la parte (ii) de la pregunta 3. Estudiemos entonces el caso $n = 1$. La función generadora de momentos de X^2 se calcula, de acuerdo con la definición, como

$$\psi_{X^2}(t) = E(e^{tX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(1-2t)}}{\sqrt{2\pi}} dx = \sqrt{\frac{1}{1-2t}}.$$

Usando (i) de la pregunta 3 concluimos que X^2 tiene ley gama de parámetros $\lambda = 1/2, p = 1/2$. Sin usar funciones generadoras, pero en el marco de la inducción, procedemos como sigue: primero calculamos la ley de $U = X^2$ para X normal $N(0,1)$, mediante

$$P(U \le u) = P(X^2 \le u) = P(-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}) = \Phi(\sqrt{u}) - \Phi(-\sqrt{u}),$$

donde Φ es la función de distribución de la normal $N(0,1)$. Derivamos c/r a u para obtener la densidad de U

$$f_U(u) = \frac{\Phi'(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} + \frac{\Phi'(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} = \frac{\Phi'(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} = \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{2\pi u}}.$$

Por otra parte, si V es independiente de U, con ley gama parámetros $\lambda = 1/2, p = n/2$, su densidad está dada por

$$f_V(v) = \frac{v^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{2^n}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

y la conjunta de (U,V) es

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v) = \frac{e^{-\frac{u+v}{2}}}{\sqrt{\pi u}} \frac{v^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{2^{n+1}}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Sean $S = U+V, T = V$, entonces $U = S-T$, $V = T$ y el determinante del jacobiano (de la inversa) vale 1, de manera que la densidad conjunta de S, T se escribe como

$$f_{S,T}(s,t) = f_{U,V}(s-t,t) = \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{\sqrt{\pi(s-t)}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{2^{n+1}}\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad s \ge t.$$

Para obtener la densidad marginal de S debemos integrar la conjunta con respecto a t. La integral a calcular es

$$\int_0^s \frac{t^{n/2-1}}{\sqrt{s-t}}.$$

Mediante el cambio de variable $sx = t$ llegamos a

$$\frac{s^{n/2}}{\sqrt{s}} \int_0^1 x^{n/2-1}(1-x)^{1/2-1}dx = \frac{s^{n/2}}{\sqrt{s}} B(n/2, 1/2),$$

donde $B(a,b)$ es la función Beta (que aparece como constante de integración en la densidad beta) y que se relaciona con la función gama mediante la identidad

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Obtenemos
$$\int_0^s \frac{t^{n/2-1}}{\sqrt{s-t}} = \frac{s^{n/2}}{\sqrt{s}} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)}$$
y la marginal f_S quedaría entonces como
$$f_S(s) = \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{\sqrt{\pi 2^{n+1}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^s \frac{t^{n/2-1}}{\sqrt{s-t}} = \frac{s^{n/2-1/2}e^{-s/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi 2^{n+1}}\Gamma(n/2)\Gamma((n+1)/2)}.$$
Depués de las cancelaciones del caso llegamos a
$$f_S(s) = \frac{s^{n/2-1/2}e^{-s/2}}{\sqrt{2^{n+1}}\Gamma((n+1)/2)},$$
que identificamos con la densidad de una v.a. gama de parámetros $\lambda = 1/2, p = (n+1)/2$. Notar que al cancelar hemos usado el valor $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, que se calcula con algunos cambios de variables. Concluye entonces la demostración mediante inducción y cambio de variables. El método de la convolución o del condicionamiento, conducen esencialmente al mismo cálculo de integrales. Se observa que es mucho más fácil trabajar con las funciones generadoras de momentos.

3.

(i)
$$\psi_X(t) = \int_0^\infty \frac{e^{tx}\lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}dx = \frac{\lambda^p}{(\lambda-t)^p}\int_0^\infty \frac{(\lambda-t)^p x^{p-1}e^{-(\lambda-t)x}}{\Gamma(p)}dx,$$
de donde llegamos al resultado puesto que bajo la integral tenemos la función densidad gama de parámetros $(\lambda - t, p)$, que integra naturalmente a 1.

(ii) Dado que las v.a. X e Y son independientes, la función generadora de la suma es el producto de las correspondientes generadoras. Es decir,
$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\psi_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^p \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^q = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{p+q}.$$
Reconocemos entonces que $X+Y$ tiene una ley gama de parámetros $(\lambda, p+q)$.

4.

(a) Designemos por X e Y los instantes de llegada de A y B respectivamente. Supondremos que ambas v.a. son independientes, uniformes en $[0, 60]$ (consideramos las 9 AM como la hora cero y contamos en minutos hasta las 10 AM). Para calcular la probabilidad de que se encuentren consideramos dos casos: si A llega antes que B $(X < Y)$ entonces se produce el encuentro si $Y - X < 10$. Ambas condiciones las podemos resumir en
$$0 < Y - X < 10,$$

ignorando las igualdades que tienen probabilidad nula. Por otra parte, si B llega antes ($Y < X$), las amigas se encuentran si $X - Y < 15$ y resumimos esta situación en

$$0 < X - Y < 15.$$

Para calcular la probabilidad identificamos ambos sucesos con regiones de $[0, 60] \times [0, 60]$, como sigue: el primer suceso tiene asociada la región (sobre la diagonal)

$$R_1 = \{(x, y) \in [0, 60]^2 | \, 0 < y - x < 10\},$$

que corresponde al espacio entre la diagonal y la recta $y = x + 10$. El área de R_1 se calcula como $60 \cdot 60/2 - 50 \cdot 50/2 = 550$. Por otra parte, el segundo suceso tiene asociada la región (bajo la diagonal)

$$R_2 = \{(x, y) \in [0, 60]^2 | \, 0 < x - y < 15\},$$

correspondiente al espacio entre la diagonal y la recta $y = x - 15$. El área de R_2 se calcula como $60 \cdot 60/2 - 45 \cdot 45/2 = 787.5$. Finalmente, sumando ambas áreas y dividiendo por el área total obtenemos la probabilidad de encontrarse

$$p = (550 + 787.5)/3600 \approx 0.37.$$

(b) Nos ponemos primeramente en el caso en que A llega antes que B. Si hay encuentro ($Y - X < 10$) entonces A estará en la tienda hasta que B haya completado sus 15 minutos, es decir

$$T_A = 15 + Y - X, \quad \text{si } 0 < Y - X < 10.$$

Por otra parte, si B llega antes que A y hay encuentro entonces existen dos posibilidades: A llega menos de cinco minutos después que B y necesariamente termina sus 10 minutos antes de que B haya completados los suyos (15), o bien, A llega después de 5 minutos y B tendrá entonces que esperar a A. Veamos en detalle: suponiendo que B llega antes que A y que A llega menos de 5 minutos después que B, tenemos

$$T_A = 15 - (X - Y) \quad \text{si } 0 < X - Y < 5.$$

En cualquier otro caso (no se encuentran o A llega después de 5 minutos que B) A permanecerá 10 minutos en la tienda. Todo lo anterior se resume en la siguiente expresión, donde usamos indicadoras

$$T_A = 10(\mathbb{1}_{\{Y-X \geq 10\}} + \mathbb{1}_{\{X-Y \geq 5\}}) + (15 + Y - X)\mathbb{1}_{\{0<Y-X<10\}}$$

$$+(15 - (X - Y))\mathbb{1}_{\{0<X-Y<5\}}.$$

Notando que T_A es una función de X, Y, el valor esperado lo calculamos integrando con respecto a la densidad conjunta y recordando que la esperanza de una indicadora es la probabilidad. Es decir,

$$E(T_A) = 10(P(Y - X \geq 10) + P(X - Y \geq 5)) + \int_{R_1} (15 + y - x) dx dy/3600$$

$$+ \int_{R_3} (15 + y - x) dx dy/3600,$$

donde $R_3 = \{(x, y) \in [0, 60]^2 | \; 0 < x - y < 5\}$. Las probabilidades se calculan fácilmente puesto que las regiones asociadas son dos triángulos.

$$P(Y - X \geq 10) + P(X - Y \geq 5) = (50^2/2 + 55^2/2)/3600 = 221/288.$$

La integral sobre R_1 se escribe como

$$\int_0^{60} \int_{(y-10)^+}^{y} (15 + y - x) dx dy = \int_0^{60} [x(15 + y - x/2)]_{(y-10)^+}^{y} \, dy,$$

donde $(y - 10)^+$ es la parte positiva de $y - 10$, que vale 0 si $y < 10$ y vale $y - 10$ cuando $y \geq 10$. La última integral podemos escribirla como

$$\int_0^{60} (y(15 + y/2) - (y - 10)^+(15 + y - (y - 10)^+/2)) dy,$$

la cual se descompone a su vez en

$$\int_0^{60} (y(15 + y/2) dy - \int_{10}^{60} (y - 10)(20 + y/2) dy.$$

Calculamos las primitivas y obtenemos

$$\left[\frac{15y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\right]_0^{60} - \left[\frac{y^3}{6} + \frac{15y^2}{2} - 200y\right]_{10}^{60} = 63000 - 156250/3 = 32750/3$$

Por otra parte, la integral sobre R_3 sa calcula de manera análoga como

$$\int_0^{60} \int_y^{(5+y)\wedge 60} (15 + y - x) dx dy = \int_0^{60} [x(15 + y - x/2)]_y^{(5+y)\wedge 60} \, dy,$$

donde $(5 + y) \wedge 60$ es es el mínimo entre $5 + y$ y 60. La integral se descompone en la suma de

$$\int_0^{55} [x(15 + y - x/2)]_y^{(5+y)} \, dy + \int_{55}^{60} [x(15 + y - x/2)]_y^{60} \, dy = 21625/6.$$

Finalmente,

$$E(T_A) = 10 \cdot 221/288 + (32750/3 + 21625/6)/3600 = 10115/864 \approx 11.707$$

Consideremos ahora el cálculo de $E(T_B)$, donde el razonamiento es totalmente análogo e incluso más sencillo. Si A llega primero $(0 < Y - X)$ entonces $T_B = 15$, sin importar si se encuentran o no. Por otra parte, si B llega primero y A llega antes de 5 minutos $(0 < X - Y < 5)$, también se tiene $T_B = 15$. Por último si A llega más de 5 minutos después de B y se encuentran $(5 < X - Y < 15)$ entonces $T_B = 10 + X - Y$. Usando la notación de las indicadoras tenemos

$$T_B = 15(\mathbb{1}_{\{X-Y\leq 5\}} + \mathbb{1}_{\{X-Y\geq 15\}}) + (10 + X - Y)\mathbb{1}_{\{5<X-Y<15\}}.$$

Como antes, debemos evaluar las probabilidades de los sucesos que producen el valor 15.

$$P(X - Y \leq 5) + P(X - Y \geq 15) = 1 - P(5 < X - Y < 15) =$$

$$1 - (55^2/2 - 45^2/2)/3600 = 31/36.$$

Por otra parte, la integral correspondiente al segundo término está dada por

$$\int_0^{60} \int_{(5+y)\wedge 60}^{(15+y)\wedge 60} (10 + x - y)dxdy =$$

$$\int_0^{45} \int_{(5+y)}^{(15+y)} (10 + x - y)dxdy + \int_{45}^{55} \int_{(5+y)}^{60} (10 + x - y)dxdy = 29750/3.$$

Obtenemos finalmente,

$$E(T_B) = 15 \cdot 31/36 + 29750/(3 \cdot 3600) = 3385/216 \approx 15.67.$$

(c) Comencemos por escribir el gasto G como función de los tiempos de permanencia. Para ello deberemos introducir una nueva v.a. T_{AB} definida como el tiempo en que ambas están juntas en la tienda. De acuerdo con el enunciado resulta

$$G = g_A T_A + g_B T_B + (g_A + g_B)T_{AB}.$$

Sólo faltaría calcular $E(T_{AB})$ para completar el desarrollo. Supongamos como antes que A llega primero y que se encuentran $(0 < Y - X < 10)$. Entonces, el tiempo que ambas amigas están juntas será $T_{AB} = 15$. Si B llega primero y A llega antes de 5 minutos $(0 < X - Y < 5)$ entonces $T_{AB} = 15 - (X - Y)$. Si B llega primero y A llega después de 5 minutos y se encuentran $(5 < X - Y < 15)$ entonces $T_{AB} = 10$. Finalmente, si no se encuentran, $T_{AB} = 0$. En la notación de indicadoras tenemos

$$T_{AB} = 15\mathbb{1}_{\{0<Y-X<10\}} + (15 - (X - Y))\mathbb{1}_{\{0<X-Y<5\}} + 10\mathbb{1}_{\{5<X-Y<15\}}.$$

Al calcular el valor esperado encontramos en primer término,

$$15P(0 < Y - X < 10) = 15(60^2/2 - 50^2/2)/3600 = 55/24.$$

Luego aparece una integral que ya calculamos

$$\frac{1}{3600} \int_0^{60} \int_y^{(5+y)\wedge 60} (15 + y - x) dx dy = 21625/6/3600 = 865/864.$$

Finalmente,

$$10P(5 < X - Y < 15) = 10(55^2/2 - 45^2/2)/3600 = 25/18,$$

de manera que

$$E(T_{AB}) = 55/24 + 865/864 + 25/18 = 4045/864 \approx 4.68.$$

Con los valores calculados obtenemos

$$E(G) = g_A \frac{10115}{864} + g_B \frac{3385}{216} + (g_A + g_B) \frac{4045}{864} = g_A \frac{295}{18} + g_B \frac{17585}{864},$$

o bien,

$$E(G) \approx 16.38 g_A + 20.35 g_B.$$

5.

(a) Lo más simple parece ser un cambio de variables con Jacobiano, porque la transformación es lineal. Sean entonces $U = g_1(X, Y) = X - Y - \mu + \nu$ y $Z = g_2(X, Y) = X + Y - \mu - \nu$. Entonces, la inversa está dada por $X = h_1(U, Z) = (U + Z)/2 + \mu$ e $Y = h_2(U, Z) = (Z - U)/2 + \nu$. Por lo tanto, la matriz jacobiana tiene $1/2, 1/2$ en la primera fila y $1/2, -1/2$ en la segunda. El valor absoluto del determinante del jacobiano es entonces $1/2$ y

$$f_{U,Z}(u, z) = f_X((u + z)/2 + \mu) f_Y((z - u)/2 + \nu)/2.$$

Por otra parte,

$$f_X((u + z)/2 + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+z}{2\sigma}\right)^2}$$

y

$$f_Y((z - u)/2 + \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-u}{2\sigma}\right)^2}.$$

Al hacer el producto y simplificar, obtenemos

$$f_{U,Z}(u, z) = \frac{1}{2\pi 2\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+z^2}{2\sigma^2}\right)} = f_U(u) f_Z(z),$$

con

$$f_U(y) = f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2},$$

lo que muestra que U y Z son $N(0, 2\sigma^2)$ independientes.

(b) También en este caso parece simple usar el método del jacobiano. Consideramos $V = U/Z$ y $W = Z$, entonces $U = VW$ y $Z = W$. El jacobiano tiene como primera fila $w, 0$ y como segunda, $v, 1$. Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es $|w|$. Tenemos entonces,

$$f_{V,W}(v, w) = f_U(vw) f_Z(w) w = \frac{|w|}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(1+v^2)w^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

Para obtener la marginal de V integramos con respecto a w (hay primitiva fácil), notando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(1+v^2)w^2}{2\sigma^2}\right)} dw = 2\int_0^{\infty} w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(1+v^2)w^2}{2\sigma^2}\right)} dw = \frac{4\sigma^2}{1+v^2}.$$

Finalmente,

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi(1+v^2)}, \quad v \in I\!R.$$

6. Sean X e Y v.a. uniformes en $[0, L]$, entonces, el largo del segmento central está dado por la v.a. $Z = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}$. Calculamos su función de distribución notando que el suceso $(Z \leq z)$ puede escribirse como unión de dos sucesos disjuntos: $(Z \leq z, X < Y)$ y $(Z \leq z, X \geq Y)$. Además, $(Z \leq z, X < Y)$ es equivalente a $(Y - X \leq z, X < Y)$ y $(Z \leq z, X \geq Y)$ es equivalente a $(X - Y \leq z, X \geq Y)$. Por lo tanto,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Y - X \leq z, X < Y) + P(X - Y \leq z, X \geq Y).$$

Definiendo $R_1 = \{(x, y)|\ y - x \leq z, x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y)|\ x - y \leq z, x \geq y\}$ tenemos

$$F_Z(z) = \frac{1}{L^2}\int_{R_1} dxdy + \frac{1}{L^2}\int_{R_2} dxdy = \frac{\text{área}(R_1) + \text{área}(R_2)}{L^2}.$$

Notemos además, por simetría, que área(R_1) = área(R_2), de manera que $F_Z(z) = 2 \times \text{área}(R_1)/L^2$. Para calcular el área de R_1 notamos que se trata de la región entre la recta $y = x + z$ y la diagonal, con $z \in [0, L]$, cuya área es la diferencia de las áreas de dos triángulos rectángulos e isósceles, de lados L y $L - z$, es decir

$$\text{área}(R_1) = L^2/2 - (L - z)^2/2 = Lz - z^2/2.$$

Finalmente,

$$F_Z(z) = \frac{2z}{L} - \frac{z^2}{L^2}, \quad z \in [0, L].$$

Como parece evidente, para $z < 0$ se tiene $F_Z(z) = 0$ y para $z > L$, $F_Z(z) = 1$. Observamos que F_Z es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable, excepto en 0 y 1. Podemos calcular su densidad derivando y obtener

$$f_Z(z) = \frac{2}{L}\left(1 - \frac{z}{L}\right) \mathbb{1}_{[0,L]}(z).$$

7. Resulta evidente que la probabilidad de construir un triángulo no puede depender de L, de manera que tomaremos $L = 1$. El cálculo se puede hacer naturalmente dejando L y sólo es un poco más engorroso. En cualquier caso, se recomienda hacer un dibujo.

   Notemos en primer término que los lados del supuesto triángulo tienen longitudes $X \wedge Y$, $X \vee Y - X \wedge Y$ y $1 - X \vee Y$, donde $\wedge$ y $\vee$ denotan mínimo y máximo respectivamente. Para que haya triángulo deben cumplirse las siguientes tres desigualdades (triangulares):

$$X \wedge Y \leq X \vee Y - X \wedge Y + 1 - X \vee Y \Leftrightarrow X \wedge Y \leq 1/2,$$

$$X \vee Y - X \wedge Y \leq X \wedge Y + 1 - X \vee Y \Leftrightarrow X \vee Y - X \wedge Y \leq 1/2,$$

$$1 - X \vee Y \leq X \vee Y + X \vee Y - X \wedge Y \Leftrightarrow X \vee Y \geq 1/2.$$

   Para terminar, basta identificar la región del cuadrado $[0, 1]^2$ que corresponde a las desigualdades anteriores y calcular su área. Dividamos el cuadrado en cuatro subcuadrados de lado 1/2, que llamaremos, siguiendo los puntos cardinales, SO, NO,NE y SE. Es claro que debemos descartar NE porque en él ambas coordenadas son mayores que 1/2 (no se cumple la primera desigualdad). Por similar razón descartamos SO porque ambas coordenadas serían inferiores a 1/2 (no se cumple la tercera desigualdad). Finalmente, la segunda desigualdad se expresa como $y - x \leq 1/2$ en NO, lo cual implica estar bajo la recta de ecuación $y = x + 1/2$, que contiene a la diagonal de NO. Es decir, nos quedamos con el triángulo inferior de NO. Del mismo modo, la segunda desigualdad se escribe como $x - y \leq 1/2$ en el cuadrado SE, lo que implica estar sobre la recta de ecuación $y = x - 1/2$. De esta manera, nos quedamos con el triángulo superior de SE. Para concluir, notamos que sólo han sobrevivido la mitad de NO y la mitad de SE. Por lo tanto, la probabilidad es 1/4.

   En el desarrollo anterior hemos calculado la probabilidad como el área de una figura debido a que la densidad conjunta de X, Y es uniforme en el cuadrado $[0, 1]^2$, de área unitaria. Además, en nuestra discusión hemos ignorado los bordes de los subcuadrados, debido (justamente) a que tienen área nula.

8. La v.a. N de Poisson tiene función de probabilidad dada por

$$p_N(n) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Por otra parte, la ley condicional de M dado N es binomial, de manera que

$$p_{M|N}(m|n) = P[M = m|N = n] = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n, q = 1 - p.$$

De la regla de probabilidades totales tenemos

$$p_M(m) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{M|N}(m|n) p_N(n) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Simplificando y agrupando términos, obtenemos

$$p_M(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda p}}{m!}.$$

Lo anterior muestra que M tiene ley marginal Poisson, de parámetro λp.

9. El método más directo es el cambio de variable con jacobiano, donde definimos $Z = X + Y, U = X - Y$. La transformción inversa está dada por $X = (Z+U)/2, Y = (Z - U)/2$ y el valor absoluto del determinante del jacobiano es $|J| = 1/2$. Por lo tanto, la densidad de conjunta de Z, U es

$$f_{Z,U}(z,u) = \frac{f(x,y)}{2} = f\left(\frac{(z+u)}{2}, \frac{(z-u)}{2}\right)\frac{1}{2},$$

es decir,

$$f_{Z,U}(z,u) = \left(1 + \frac{zu(z^2 - u^2)}{4}\right)\frac{1}{8}, \quad |z + u| \leq 2, |z - u| \leq 2.$$

Ahora debemos integrar la variable U para obtener la densidad marginal de Z. Para ello notamos que la región donde $f_{Z,U}$ es positiva está limitada por las rectas $u = -(z+2), u = -(z-2), u = -2+z, u = 2+z$. Para $z < 0$, u varía entre $-(z+2)$ y $z + 2$; para $z \geq 0$ u varía entre $z - 2$ y $2 - z$. Esto se traduce en

$$f_Z(z) = \frac{1}{8}\int_{-(z+2)}^{z+2} \left(1 + \frac{zu(z^2 - u^2)}{4}\right) du, \quad z < 0$$

y

$$f_Z(z) = \frac{1}{8}\int_{-(2-z)}^{2-z}\left(1+\frac{zu(z^2-u^2)}{4}\right)du, \quad z \geq 0.$$

Notando que la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico con respecto a 0 es nula, obtenemos

$$f_Z(z) = \frac{1}{8}\int_{-(z+2)}^{z+2} du = \frac{2+z}{4}, \quad z < 0,$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{8}\int_{-(2-z)}^{2-z} du = \frac{2-z}{4}, \quad z \geq 0.$$

El gráfico de f_Z es un triángulo equilátero, cuya base se extiende entre -2 y 2 y de altura 1/2.

10. $E(Y) = E(X_1^2 - X_2) = E(X_1^2) - E(X_2)$. Las esperanzas se calculan como

$$E(X_2) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(4x-3x^2)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{7}{12},$$

$$E(X_1^2) = \int_0^1 x^2f(x)dx = \int_0^1 x^2(4x-3x^2)dx = \left[x^4 - \frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Luego, $E(Y) = \frac{2}{5} - \frac{7}{12} = -\frac{11}{60}$. Para calcular la varianza $V(Y)$ usamos la expresión $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$, dado que ya tenemos calculada la esperanza. Entonces,

$$E(Y^2) = E((X_1^2 - X_2)^2) = E(X_1^4 + X_2^2 - 2X_1^2X_2) = E(X_1^4) + E(X_2^2) - 2E(X_1^2X_2).$$

Por otra parte, debido a la independencia entre X_1 y X_2,

$$E(X_1^2X_2) = E(X_1^2)E(X_2) = \frac{2}{5}\frac{7}{12} = \frac{14}{60}.$$

Falta calcular el cuarto momento

$$E(X_1^4) = \int_0^1 x^4(4x-3x^2)dx = \left[\frac{4}{6}x^6 - \frac{3}{7}x^7\right]_0^1 = \frac{5}{21},$$

luego,

$$E(Y^2) = \frac{5}{21} + \frac{2}{5} - 2\frac{14}{60} = \frac{6}{35}$$

y

$$V(Y) = \frac{6}{35} - \left(-\frac{11}{60}\right) = \frac{3473}{25200} = .1378.$$

Finalmente calculamos $P(Y \geq 0)$. Para ello notamos que $Y \geq 0 \Leftrightarrow X_1^2 \geq X_2$. Integramos la densidad conjunta (producto de marginales debido a la independencia) en la región $x_1^2 \geq x_2$. Es decir,

$$P(Y \geq 0) = \int_{x_1^2 \geq x_2} (4x_1 - 3x_1^2)(4x_2 - 3x_2^2) dx_1 dx_2.$$

O bien, calculamos condicionalmente como sigue:

$$P(Y \geq 0) = P(X_2 \leq X_1^2) = \int_0^1 P(X_2 \leq X_1^2 | X_1 = x_1)(4x_1 - 3x_1^2) dx_1.$$

Pero, debido a la independencia,

$$P(X_2 \leq X_1^2 | X_1 = x_1) = P(X_2 \leq x_1^2) = \int_0^{x_1^2} (4x_2 - 3x_2^2) dx_2 = x_1^4(2 - x_1^2).$$

Así llegamos a

$$P(Y \geq 0) = \int_0^1 x_1^4(2 - x_1^2)(4x_1 - 3x_1^2) dx_1 = \frac{13}{42}.$$

11.

(i) La constante K se calcula imponiendo la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = K \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\max\{x,y\}} dx dy = 1.$$

Para calcular la integral descomponemos el dominio en los conjuntos $\{x < y\}, \{x \geq y\}$, como sigue

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\max\{x,y\}} dx dy = \int\int_{x<y} e^{-\max\{x,y\}} dx dy + \int\int_{x \geq y} e^{-\max\{x,y\}} dx dy.$$

La primera integral al lado derecho vale

$$\int_0^{\infty} \int_0^{y} e^{-\max\{x,y\}} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{y} e^{-y} dx dy = \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = 1.$$

La segunda integral se calcula como

$$\int_0^{\infty} \int_0^{y} e^{-\max\{x,y\}} dx dy = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} e^{-x} dx dy = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1.$$

De lo anterior se desprende que $K = 1/2$. La densidad marginal de X se calcula como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = K\int_0^{\infty} e^{-\max\{x,y\}}dy = K\left(\int_0^x e^{-x}dy + \int_x^{\infty} e^{-y}dy\right),$$

de donde obtenemos

$$f_X(x) = (x+1)e^{-x}/2, \quad x \geq 0.$$

Por simetría, es evidente que

$$f_Y(y) = (y+1)e^{-y}/2, \quad y \geq 0.$$

(ii) Notemos primeramente que en este problema no podemos usar la técnica del cambio de variable con jacobiano, debido a la naturaleza de la función $z = g(x,y) = \max\{x,y\}$. Calculemos entonces la función de distribución de Z, como $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\max\{X,Y\} \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z)$, para $z \geq 0$, porque para z negativo es evidente que $F_Z(z) = 0$. Esta última expresión no la podemos escribir como producto de marginales debido a que sabemos (de la parte (i)) que las v.a. X e Y no son independientes. Debemos calcular entonces

$$P(X \leq z, Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f(x,y)dxdy = K\int_0^z\int_0^z e^{-\max\{x,y\}}dxdy.$$

Tal como hicimos para calcular K, descomponemos el dominio de integración $[0,z]\times[0,z]$, según $\{x<y\}$ y $\{x \geq y\}$. Es decir, por una parte tenemos

$$\int_0^z\int_0^z e^{-\max\{x,y\}}\mathbb{1}_{\{x<y\}}dxdy = \int_0^z\int_0^{\min\{y,z\}} e^{-y}dxdy = \int_0^z \min\{y,z\}e^{-y}dy =$$
$$= \int_0^z ye^{-y}dy.$$

La otra integral se calcula de manera análoga (notar la simetría) como

$$\int_0^z\int_0^z e^{-\max\{x,y\}}\mathbb{1}_{\{x\geq y\}}dydx = \int_0^z\int_0^{\min\{x,z\}} e^{-x}dydx = \int_0^z \min\{x,z\}e^{-x}dx =$$
$$= \int_0^z xe^{-x}dx.$$

Sumando ambos resultados parciales y multiplicando por la constante $K = 1/2$, obtenemos

$$F_Z(z) = \int_0^z xe^{-x}dx,$$

de donde deducimos, por derivación, la densidad de Z,

$$f_Z(z) = ze^{-z}, \quad z \geq 0.$$