CLASE AUXILIAR

ANDRÉS ITURRIAGA J.

Problema 1:

Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. Encuentre la distribución de probabilidad de la v.a. $X = \min\{X_i\}_{i=1}^n$. Estudie el caso en que $\forall i$ X_i sigue $\exp(\lambda_i)$ con λ_i iguales a λ y después λ_i distintos.

Problema 2:

Demuestre que si T_1 es una variable aleatoria que sigue una $\exp(\lambda_1)$ y T_2 es una variable aleatoria que sigue una $\exp(\lambda_2)$, con T_1 independiente de T_2 , entonces se tiene que:

$$P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Problema 3:

Sea X una variable aleatoria que sigue una $Poisson(\lambda_1)$ e Y una variable aleatoria que sigue $Poisson(\lambda_2)$, con X independiente de Y . Encuentre la distribución de $X + Y$.

Problema 4:

Considere una oficina de correos con 2 ventanillas de atención. Cuando usted llega, encuentra que hay 2 personas atendándose, una en cada ventanilla. La atención en la ventanilla 1 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro λ_1 , mientras que la atención en la ventanilla 2 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro λ_2 . Además ambos tiempos son independientes entre si.

1. ¿En cuál ventanilla se colocaría usted?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que usted sea el último en irse de la oficina, dado que escoge una ventanilla al azar? (Suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)
3. Suponga ahora que cuando usted llega hay 2 personas frente a la ventanilla 1 y sólo una persona en la ventanilla 2. Sin pensarlo, usted se pone en la fila más corta. ¿Cuál es la probabilidad de que usted sea el último en irse de la oficina? (Suponga que una vez que usted elige una fila no puede cambiarse)

Problema 5:

Considere una carrera de autos en la cual compiten C pilotos de diferentes escuderías. Para cada una de las V vueltas de la carrera e independiente de todo lo demás, un piloto tiene una probabilidad q_1 de tener un accidente y quedar fuera de la competencia. Esta probabilidad es la misma para todos los pilotos, excepto para nuestro querido Pepito Chocón, para el cual se tiene una probabilidad q_2 , con $q_2 > q_1$.

Si un piloto cualquiera logra terminar la carrera, el tiempo que transcurre desde que parte en la primera vuelta hasta que cruza la meta en la vuelta V se distribuye como una variable aleatoria exponencial de tasa μ para Pepito, y como v.a. exponenciales i.i.d. de tasa λ para el resto de los conductores.

Por el solo hecho que Pepito termine la carrera, su escudería recibe T millones de pesos, y si gana recibirá adicionalmente W . Por otra parte, si nuestro sagaz piloto no termina la carrera la escudería deberá pagar a la organización, por posibles daños a terceros, el monto de R millones.

Aburridos de perder dinero por la culpa de Pepito, su escudería se propone encontrar el valor esperado de los beneficios económicos que este aporta, para así decidir si lo despiden o no. Para ello se le contrata a usted como asesor en probabilidades, pidiéndole que conteste a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad que un piloto cualquiera logre dar más de k vueltas sin chocar? ¿Cuál es la probabilidad que este mismo piloto termine la carrera? (Trabaje con un q genérico)
2. Sin considerar a Pepito. ¿Cuál es la probabilidad que $M - 1$ de los $C - 1$ pilotos restantes terminen la carrera?
3. Dado que M pilotos terminan la carrera (entre ellos Pepito), ¿cuál es la probabilidad de que Pepito sea el ganador?
4. Usando los resultados de las partes 2 y 3, encuentre una expresión para la probabilidad que Pepito gane la carrera.
5. Finalmente calcule el valor esperado de los beneficios económicos que Pepito aporta a su escudería.