SOLUCIÓN PROBLEMA PENDIENTE

ANDRÉS ITURRIAGA J.

Problema 1:

Aproximación Lineal de una v.a. Sean X, Y v.a. Queremos aproximar Y por una función lineal afín de X , es decir, $Y = \alpha X + \beta$. Así, si d es una distancia entre variables aleatorias, pretendemos resolver:

$$\min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} d(Y, \alpha X + \beta)$$

Solución. Consideremos $d = \mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$

En estricto rigor esta no es una distancia, sino que una distancia al cuadrado. Luego nuestro problema queda:

$$\min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$$

Ahora si queremos aproximar Y por $\alpha X + \beta$, se debe cumplir que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\alpha X + \beta] \Rightarrow \beta = \mathbb{E}[Y] - \alpha \mathbb{E}[X]$.

Además, $\mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2] = \mathbb{E}[Y^2] - 2\alpha \mathbb{E}[XY] - 2\beta \mathbb{E}[Y] + \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] + 2\alpha \beta \mathbb{E}[X] + \beta^2$. Reemplazando β nuestro problema queda finalmente:

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha^2 \text{Var}(X) - 2\alpha \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y)$$

Dado que $\text{Var}(X) \geq 0$ esta función, que es una parábola, se minimiza en el vértice. Así,

$$\alpha = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho(X, Y)$$

donde $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)}$ y $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ que es el coeficiente de correlación lineal entre X e Y . Finalmente observemos que evaluando la $\mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$ en $\alpha = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho(X, Y)$ se obtiene:

$$\mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2] = \text{Var}(Y)(1 + \rho(X, Y))(1 - \rho(X, Y))$$

de donde se deduce un bonito resultado aplicado frecuentemente en Estadística, que nos dice que:

$$\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \alpha > 0, P[Y = \alpha X + \beta] = 1$$

y

$$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \alpha < 0, P[Y = \alpha X + \beta] = 1.$$