

PAUTA CONTROL #1 DE PROBABILIDAD

MA-34A Prof. R. Gouet, 14/04/08

- 1) Suponga que las nuevas patentes de automóviles, que se fabrican con 4 letras (entre las cuales no pueden estar A,E,I,O,U,Ñ,Q) y dos números (entre 0 y 9), se escogen al azar. Calcule la probabilidad de que una patente seleccionada mediante este mecanismo

(i) (1.5 pts.) No tenga ni letras ni números repetidos.

Solución: Las letras que pueden aparecer en una patente son $N = 20$: B C D F G H J K L M N P R S T V W X Y Z. Dado que las patentes se escogen al azar, tenemos un espacio Ω equiprobable, cuyos elementos son todas las patentes admisibles, que se pueden representar como una 6-tupla $(l_1, l_2, l_3, l_4, n_1, n_2)$. Las primeras cuatro coordenadas son letras (del conjunto admisible) y las dos últimas son números entre 0 y 9. Aplicando el principio de multiplicación para el cardinal de un producto cartesiano, obtenemos

$$|\Omega| = N \cdot N \cdot N \cdot N \cdot 10 \cdot 10 = 20^4 \cdot 100 = 16 \cdot 10^6.$$

Sea $A \subseteq \Omega$ el suceso correspondiente a patentes sin letras ni números repetidos. Para calcular A razonamos como sigue: la primera letra se escoge de N maneras; la segunda de $N - 1$; la tercera de $N - 2$ y la cuarta de $N - 3$. Entonces, dado que por cada manera de escoger la primera hay $N - 1$ para la segunda y por cada elección de la primera y la segunda hay $N - 2$ para la tercera, etc., concluimos que el número de maneras de escoger las letras sin repetición es $N(N - 1)(N - 2)(N - 3) = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$. El valor anterior también se obtiene a través de la fórmula para tuplas sin repetición: $N!/(N - 4)!$. Para los números la situación es análoga: existen $10 \cdot 9 = 90$ combinaciones de números. Finalmente, si por cada combinación de letras podemos poner cualquiera de los números, usamos el principio de multiplicación para obtener $|A| = 116280 \cdot 90 = 10465200$. Finalmente la probabilidad se obtiene como

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 10465200/16000000 = 0.654.$$

(ii) (1.5 pts.) No tenga números repetidos.

Solución: Sea B el suceso correspondiente a patentes sin números repetidos. Siguiendo un razonamiento como en (i), resulta $|B| = N^4 \cdot 90 = 160000 \cdot 90 = 14400000$ y

$$P(B) = 14400000/16000000 = 0.9.$$

(iii) (1.5 pts.) Empiece con B y termine en 7.

Solución: Si la patente empieza con B y termina en 7 entonces queda por escoger las demás letras (de 20^3 maneras) y el primer número (de 10 maneras). Siendo C el suceso correspondiente, tenemos $|C| = 8000 \cdot 10 = 80000$ y

$$P(C) = 80000/16000000 = 0.005.$$

- (iv) (1.5 ptos.) Sea distinta de las 100000 patentes ya otorgadas con este procedimiento. Nota: las patentes otorgadas son evidentemente todas distintas pero no tienen ninguna restricción en sus letras o números excepto que no pueden estar las letras AEIOUÑQ.

Solución: Sea D el suceso correspondiente. Entonces D contiene todas las patentes que no se han otorgado, es decir $|D| = 16000000 - 100000 = 15900000$, de manera que

$$P(D) = 15900000/16000000 = 0.994.$$

- 2) Un grupo de $M + N$ personas se encuentran participando en una actividad que se desarrolla en dos salas, S_1 y S_2 , durante un día, de manera que en S_1 siempre hay M y en S_2 siempre hay N personas. Una de estas personas es un espía, el que se encuentra inicialmente en S_1 . A lo largo del día, y cada 5 minutos, se escoge (simultáneamente) una persona en S_1 y en S_2 y se cambian de sala. Sea E_n el suceso "el espía se encuentra en S_1 , luego del n -ésimo intercambio". Nos interesa calcular $p_n = P(E_n)$ y $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, de existir. Notar la condición inicial $p_0 = 1$.

- (i) (1 pto.) Sea C_n "el espía cambia de sala en el momento n ". Demuestre o justifique verbalmente la identidad $E_n = (E_{n-1} \cap \overline{C}_n) \cup (\overline{E}_{n-1} \cap C_n)$.

Solución: E_n significa que el espía está en S_1 en la etapa n , lo cual puede ocurrir si y solo si estaba en S_1 en la etapa $n - 1$ y no fue sorteado ($E_{n-1} \cap \overline{C}_n$) o bien, no estaba en S_1 en la etapa $n - 1$ y fue sorteado ($\overline{E}_{n-1} \cap C_n$).

- (ii) (3 ptos.) Muestre que p_n satisface la recurrencia

$$p_n = p_{n-1}(1 - M^{-1} - N^{-1}) + N^{-1}, n \geq 1.$$

Solución: La recurrencia se obtiene aplicando probabilidades totales a partir de la identidad en (i). En efecto,

$$P(E_n) = P(E_{n-1} \cap \overline{C}_n) + P(\overline{E}_{n-1} \cap C_n)$$

o bien

$$P(E_n) = P(\overline{C}_n|E_{n-1})P(E_{n-1}) + P(C_n|\overline{E}_{n-1})P(\overline{E}_{n-1}).$$

Pero $P(\overline{C}_n|E_{n-1})$ es la probabilidad de no ser escogido cuando está en S_1 , cuyo valor es $1 - 1/M$ y $P(C_n|\overline{E}_{n-1})$ es la probabilidad de ser escogido cuando no está en S_1 (necesariamente en S_2), cuyo valor es $1/N$. Por lo tanto, la ecuación más arriba se escribe como

$$p_n = (1 - 1/M)p_{n-1} + (1/N)(1 - p_{n-1}).$$

Factorizando p_{n-1} se llega a la recurrencia.

- (iii) (1 pto.) Muestre que $p_n \geq M/(M + N), \forall n \geq 0$.

Solución: Usamos un argumento de inducción. Para $n = 0$ se tiene $p_0 = 1$ y la propiedad es cierta. Si la propiedad se cumple hasta $n - 1$, usamos la recurrencia para obtener

$$p_n \geq \frac{M}{M+N} \left(1 - \frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N} = \frac{M}{M+N}.$$

(iv) (1 pto.) Muestre que (p_n) es decreciente y convergente a $M/(M+N)$.

Solución: $p_n \leq p_{n-1}$ si y solo si $p_{n-1}(1 - M^{-1} - N^{-1}) + N^{-1} \leq p_{n-1}$, lo cual es equivalente a

$$p_{n-1} \geq \frac{N^{-1}}{M^{-1} + N^{-1}} = \frac{M}{M+N}.$$

Pero esta última desigualdad es siempre cierta, en virtud de (iii). Resulta entonces que (p_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto convergente. Supongamos que el límite es λ , entonces, usando la recurrencia obtenemos la siguiente ecuación:

$$\lambda = \lambda(1 - M^{-1} - N^{-1}) + N^{-1},$$

cuya solución es $\lambda = M/(M+N)$.

- 3) Un estudiante viaja desde su casa a la Escuela de Ingeniería para entregar una importante tarea, disfrutando de las maravillas del transantiago. Primero toma un bus de acercamiento, luego se sube a un alimentador y finalmente al metro. Suponga que en cada medio de transporte al que sube, la probabilidad de que pierda su tarea, dado que no la ha perdido antes, es p . Al llegar, el estudiante constata con desesperación que ya no tiene la tarea. Calcule la probabilidad de que la haya extraviado en el bus de acercamiento, en el alimentador o en el metro, respectivamente, como función de p . Estudie los valores de la probabilidad cuando $p \rightarrow 0$ y $p \rightarrow 1$.

Solución: Sean los sucesos A = "la tarea se pierde", A_1 = "la tarea se pierde en el bus de acercamiento", A_2 = "la tarea se pierde en el bus alimentador y A_3 = "la tarea se pierde en el metro". Se pide calcular las probabilidades condicionales $P(A_1|A)$, $P(A_2|A)$, $P(A_3|A)$. Disponemos de los siguientes datos: $P(A_1) = p$, $P(A_2|\bar{A}_1) = p$ y $P(A_3|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p$. Sabemos también que $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y que los sucesos son disjuntos, de manera que $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Por otra parte,

$$P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = 0 \cdot p + p(1 - p) = p(1 - p)$$

y

$$P(A_3) = P(A_3|A_1 \cup A_2)P(A_1 \cup A_2) + P(A_3|\overline{A_1 \cup A_2})P(\overline{A_1 \cup A_2}).$$

El primer término de la suma es 0 y el segundo se descompone como

$$P(A_3|\overline{A_1 \cup A_2})P(\overline{A_1 \cup A_2}) = pP(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = pP(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = p(1 - p)^2.$$

Reuniendo los términos parciales se llega a

$$P(A) = p + p(1 - p) + p(1 - p)^2.$$

Finalmente,

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{1}{1 + (1 - p) + (1 - p)^2},$$

$$P(A_2|A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_2)}{P(A)} = \frac{1 - p}{1 + (1 - p) + (1 - p)^2},$$

$$P(A_3|A) = \frac{P(A_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_3)}{P(A)} = \frac{(1 - p)^2}{1 + (1 - p) + (1 - p)^2}.$$

Cuando $p \rightarrow 0$ se obtiene $P(A_1|A) \rightarrow 1/3$, $P(A_2|A) \rightarrow 1/3$ y $P(A_3|A) \rightarrow 1/3$.

Cuando $p \rightarrow 1$ se obtiene $P(A_1|A) \rightarrow 1$, $P(A_2|A) \rightarrow 0$ y $P(A_3|A) \rightarrow 0$.

Tiempo: 2h15