

## GUIA #3 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

MA-34A Prof. R. Gouet, 19/03/08

1. Suponga que dispone de  $m$  cajas numeradas del 1 al  $m$ , donde debe distribuir  $n$  bolitas. Calcule el número de maneras en que puede distribuir las bolitas si:
  - (i) Cada caja tiene capacidad máxima de 2 bolitas y no puede quedar ninguna vacía. Suponga en este caso que  $m \leq n \leq 2m$ . (sol:  $\frac{m!}{(n-m)!(2m-n)!}$ )
  - (ii) Sólo las cajas 1 y  $m$  tienen capacidad máxima de 2 bolitas, suponiendo que  $n \geq 4$  y que  $n + m \geq 7$ . (sol:  $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{(m+n-i-j-3)!}{(m-3)!(n-i-j)!}$ )
2. Se escoge al azar un equipo de basketball de 5 jugadores, de un conjunto de 20 postulantes, de tal manera que todos los subconjuntos de tamaño 5 tengan igual probabilidad. Proponga el espacio muestral y la medida de probabilidad adecuados a la descripción del experimento y calcule la probabilidad de que
  - (i) Los 5 más altos sean seleccionados. (sol:  $1/15504$ )
  - (ii) El más alto sea seleccionado. (sol:  $3876/15504 = 1/4$ )
  - (iii) Ni el más alto ni el más bajo sean seleccionados. (sol:  $8568/15504 = 21/38 = .55263\dots$ )
3. Considere la elección al azar de una permutación de los números  $1, 2, \dots, n$ . Sea  $\Omega$  el espacio equiprobable de dichas permutaciones y  $A_i \subseteq \Omega$  el suceso "el número  $i$  está en el lugar  $i + 1$  de la permutación" para  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $A_n$  el suceso "el número  $n$  está en el lugar 1 de la permutación".
  - (i) Calcule  $P(A_i)$  y  $P(A_i \cap A_j), i \neq j; i, j = 1, \dots, n$ . (sol:  $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = 1/n$ ,  $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = 1/n(n-1)$ )
  - (ii) Calcule  $P(A_i \cup A_j)$ , donde  $1 \leq i, j \leq n$  e  $i \neq j$ . (sol:  $\frac{2n-3}{n(n-1)}$ )
4. Una urna contiene 5 bolas blancas, 4 bolas rojas y 3 bolas azules. Se extraen sucesivamente y al azar tres bolas sin reposición.
  - (i) Calcule la probabilidad de obtener al menos dos bolas de colores distintos. (sol:  $\frac{41}{44}$ )
  - (ii) Calcule la probabilidad de obtener exactamente dos colores distintos. (sol:  $\frac{29}{44}$ )
5. En una asamblea de  $n$  estudiantes de MA34A se discute sobre 3 métodos alternativos de escoger un comité de  $k \leq n$  estudiantes con un presidente. Un estudiante propone seleccionar el comité de  $k$  personas y dentro de él seleccionar al presidente. Otro sugiere seleccionar un grupo de  $k - 1$  personas y escoger el presidente entre los restantes. Finalmente otro estudiante sugiere seleccionar primero al presidente de

entre todos los estudiantes y luego de los restantes escoger los  $k-1$  miembros. Calcule en cada caso el número de comités distintos que se pueden formar y compare. (sol:  $\binom{n}{k}k$ ,  $\binom{n}{k-1}(n-k+1)$ ,  $n\binom{n-1}{k-1}$ ) Vale la pena discutir sobre cual método utilizar?

6. Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sucesos relativos a un espacio muestral  $\Omega$ , dotado de una probabilidad  $P$  tal que  $P(A_i) = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Demuestre por inducción que  $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
7. Un comité 12 personas debe seleccionarse de un grupo de 10 hombres y 10 mujeres. De cuántas maneras puede hacerse esta selección si:
  - (i) No hay restricciones.
  - (ii) Debe haber 6 hombres y 6 mujeres.
  - (iii) Debe haber un número par de mujeres.
  - (iv) Debe haber más mujeres que hombres.
  - (v) Debe haber a lo menos 8 hombres.
8. De cuántas maneras un jugador puede extraer 5 cartas de un mazo de 52 y obtener
  - (i) 5 cartas de la misma pinta.
  - (ii) 4 ases.
  - (iii) 4 del mismo valor.
  - (iv) 3 ases y dos reyes.
  - (v) Full (3 de un tipo y un par).
  - (vi) 3 de un tipo.
  - (vii) Dos pares.
9. Un estudiante debe escoger 7 de 10 preguntas en un examen. De cuántas formas puede hacerlo si
  - (i) No hay restricciones.
  - (ii) Debe responder a las 2 primeras.
  - (iii) Debe responder al menos 3 de las primeras 5 preguntas.
10. De cuántas maneras es posible distribuir 12 libros diferentes (distinguibiles) entre 4 niños de manera que:
  - (i) Cada niño tenga exactamente 3 libros.
  - (ii) Los 2 niños mayores tengan 4 libros cada uno y los menores, 2 libros cada uno.