GUIA #2 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

MA-34A Prof. R. Gouet, 19/03/08

1. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia cualquiera de sucesos. Demuestre la siguiente desigualdad, conocida como desigualdad de Boole (no olvide el axioma de σ-aditividad).

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \infty.$$

   Use la desigualdad para demostrar que la unión de una familia numerable de sucesos de probabilidad 0 tiene probabilidad 0.

2. Sea $A \subseteq \Omega$ un suceso y $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ su función indicadora, definida como $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ para $\omega \in A$ y $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ para $\omega \notin A$. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de sucesos y sea $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Muestre que

$$\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty.$$

   Notar que la divergencia de la serie de funciones indicadoras, evaluadas en ω, significa que ω pertenece a una infinidad de sucesos A_n (en otras palabras, hay infinitos A_n que ocurren, si interpretamos a ω como el resultado de un experimento).

3. Sean A, B conjuntos de cardinales respectivos m, n, con $m \geq n$.
   (i) Muestre que el número de funciones epiyectivas de A en B está dado por

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

   (ii) Use un argumento combinatorial para demostrar la identidad

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^n$$

4. La municipalidad de Huechuraba tiene 7 contratos diferentes, relacionados con temas informáticos. Cuatro empresas pueden adjudicarse cualquiera de los contratos pero por razones políticas es necesario que todas las empresas tengan al menos un contrato. De cuántas maneras es posible adjudicar los contratos a las empresas?

5. Determine cuántas palabras de largo 7 pueden formarse con las letras A,B,C,D de manera que cada una de estas letras aparezca al menos una vez.
6. Siete personas que no se conocen esperan el ascensor en el primer piso de un edificio de 5 pisos. Calcule la probabilidad de que el ascensor deba detenerse en todos los pisos (del 2 al 5). Explique los supuestos de su cálculo.
7. Un curso de la carrera tiene un profesor auxiliar y tres ayudantes. Suponga que hay siete exámenes especiales que corregir. De cuántas formas pueden ser asignados los exámenes de manera que el auxiliar corrija el examen del mejor alumno (Pérez) y cada uno de los ayudantes corrija al menos un examen? Considere los casos en que el auxiliar corrige sólo un examen (el de Pérez) y más de un examen (el de Pérez y otros).
8. Cuatro bolitas distinguibles deben distribuirse en tres urnas distinguibles, de manera que ninguna quede vacía. Determine el número de tales configuraciones y muestre 6 casos distintos.
9. Determine de cuántas maneras pueden distribuirse m bolitas distinguibles, en n urnas distinguibles, de manera que ninguna quede vacía.
10. Muestre que el número de maneras de distribuir m bolitas distinguibles en n urnas idénticas (no distinguibles), de manera que ninguna quede vacía, es

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m.$$