GUIA #1 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

MA-34A Prof. R. Gouet, 19/03/08

1. Considere el experimento consistente en escoger una bolita dentro de una caja que contiene 10 bolitas blancas y 5 negras.
   - Proponga un espacio muestral Ω suponiendo que observa sólo el color de la bolita extraída.
   - Suponga que las bolitas están numeradas de 1 a 15 y que al extraer la bolita se registra su número. Proponga un espacio muestral Ω apropiado y describa (hacer la lista de los elementos) los sucesos (subconjuntos de Ω) que corresponden a las afirmaciones siguientes: "la bolita es blanca", "la bolita tiene un número par", "la bolita tiene el número 5".

2. Sea el experimento consistente en extraer dos bolitas de la caja del ejercicio anterior, sin reposición. Es decir, se saca una bolita, se deja fuera de la caja, y luego se saca una segunda de las que quedan en la caja.
   - Proponga un espacio muestral Ω suponiendo que se observa sólo el color de las bolitas extraídas. Con respecto a este espacio, describa (especificar el subconjunto correspondiente de Ω) los sucesos "ambas bolitas tienen igual color", "una de ellas es blanca", "son de distinto color".
   - Como antes, suponemos las bolitas numeradas del 1 al 15. Proponer un espacio muestral que corresponda a la acción de registrar los números de las bolitas extraídas y describa los sucesos "ambas bolitas tienen igual número", "ambas son blancas", "la primera es blanca", "la primera tiene un número menor que la segunda".

3. Considere un experimento $\mathcal{E}$ con su espacio muestral asociado Ω y los sucesos A, B y C. Escriba en términos de A, B, C los siguientes sucesos: "A no ocurre pero B si ocurre", "ninguno de los tres sucesos ocurre", "alguno ocurre", "todos ocurren", "exactamente uno ocurre", "exactamente dos ocurren".

4. Sea el experimento consistente en lanzar n veces una moneda, registrando en cada tirada si sale cara o sello.
   - Escriba el espacio muestral apropiado y caracterice los siguientes sucesos: $A_k =$ "la tirada k resulta cara", donde k es un entero entre 1 y n.
   - Escriba, en función de los A_k, los siguientes sucesos: "todas las tiradas son caras", "alguna es cara", "la primera y la última son caras", ", "al menos dos son cara", "salen exactamente m caras" (en los últimos dos casos se sugiere trabajar con las funciones indicadoras de los sucesos A_k).

5. Sean A, B, C sucesos relativos a un espacio muestral Ω. Demuestre (algebraicamente) la siguiente fórmula de inclusión-exclusión, usando la fórmula demostrada

en clase para el caso de dos sucesos:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

6. Demuestre por inducción la desigualdad

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

donde $n \in I\!N$ y $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ son sucesos cualesquiera.

7. Sea $(A_n)_{n\in I\!N}$ una familia de sucesos disjuntos dos a dos, es decir, $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall m \neq n$. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \in [0, 1].$$

Se sugiere aplicar la aditividad de P con el suceso $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, luego tomar límite con $n \to \infty$, sabiendo que toda probabilidad está acotada por 1.

8. Sea $(B_n)_{n\in I\!N}$ una familia creciente de sucesos, en el sentido que $B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in I\!N$. Use la propiedad demostrada en el ejercicio anterior para probar la propiedad de continuidad monótona (creciente) de P:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Se sugiere expresar la union de conjuntos crecientes como una unión de conjuntos disjuntos 2 a 2.

9. Sea $(A_n)_{n\in I\!N}$ una familia decreciente de sucesos, en el sentido que $A_{n+1} \subseteq A_n, \forall n \in I\!N$. Usando el axioma de σ aditividad muestre la siguiente propiedad de continuidad monótona (decreciente) de P:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Se sugiere pasar a los complementos.

10. Sean A, B dos sucesos relativos a un espacio muestral Ω. Demuestre que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(B).$$