PAUTA P1 C2

$\Leftarrow$)

Tenemos que $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ (por definición de independencia de σ-álgebras) $\Rightarrow A_1, A_2$ son eventos independientes *(3 ptos)*

$\Rightarrow$)

Tenemos que Ω, $\emptyset$ siempre son independientes de todo evento. Luego, sólo debemos probar 4 igualdades:

Primero, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ (por definición de independencia de eventos).

Segundo, $\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = \mathbb{P}((A_1 \cup A_2)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)) = 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2)) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)$(donde la cuarta igualdad nace de la independencia de los eventos).

Tercero, notemos que $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)$ donde la unión es disjunta, luego $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)(1 - \mathbb{P}(A_2)) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^c)$ (donde en la segunda igualdad se usó la independencia de los eventos).

Por último, por simetría con la tercera igualdad, tendremos que $\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)$.

Así, tendremos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$son sigma - álgebras independientes. *(3 ptos) (OJO: Para argumentar esta parte NO se podían usar propiedades vistas en cátedra).*