PAUTA P2 C2

a)

Como siempre, calculemos primero su función de distribución. Para ello, notemos primero que dado que X toma valores solamente en (0,1), *1-X* también vivirá siempre en (0,1), luego *ln(1-X)* será siempre un número negativo, y al multiplicarlo por $-\lambda$ resultará siempre un número positivo. Luego $F_Y(y) = 0 \forall y \leq 0$. Para y>0:

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\frac{1}{\lambda}ln(1-X) \leq y) = \mathbb{P}(ln(1-X) \geq -\lambda y) = \mathbb{P}(1-X \geq e^{-\lambda y}) = \mathbb{P}(X \leq 1-e^{-\lambda y})$ (donde en la tercera igualdad se usó que la exponencial es estrictamente creciente). Ahora notamos que $1-e^{-\lambda y} \in (0,1) \forall y > 0$, luego, dado que X se distribuye en forma uniforme en (0,1), $\mathbb{P}(X \leq 1-e^{\lambda y}) = 1-e^{-\lambda y}$ (OJO: a esto se podía llegar simplemente conociendo la distribución de la uniforme o integrando su densidad). Luego $F_Y(y) = 1-e^{-\lambda y}$, y derivando obtenemos $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, que es justamente la distribución de la exponencial. *(3 ptos).*

b)

Calculemos:

$\mathbb{P}(Z > s+t | Z > t) = \frac{\mathbb{P}(Z>s+t, Z>t)}{\mathbb{P}(Z>s)}$. Pero en el numerador, como s>0, el evento *Z>t* está contenido en el evento *Z>s+t,* luego esto resulta igual a $\frac{\mathbb{P}(Z>s+t)}{\mathbb{P}(Z>s)}$. Utilizando que Z es exponencial, tenemos que si $z > 0$ $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1-e^{-\lambda z}$, luego $\mathbb{P}(Z > z) = e^{-\lambda z}$. Reemplazando en la expresión que tenemos, resulta $\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(Z > t)$, que es a lo que queríamos llegar. *(3 ptos).*