PAUTA P4 C2

a)

Primero que nada, notemos que dado que en Ω_0 pusimos la σ álgebra de las partes, toda función que vaya a $\mathbb{R}$ será variable aleatoria. *(0.5 ptos)*

Notemos además que $\forall j, X_j$ toma valores en {0,1}. Así, solo hay que probar que $\mathbb{P}(X_j = 1) = p$. En efecto, $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(\{x \in \Omega_0 : x_j = 1\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{x \in \Omega_0 : x_j = 1\} \cap \{x \in \Omega_0 : u(x) = k\})$, donde $u(x)$ es la cantidad de 1's del vector x (notar que la suma parte de 1 porque todos los elementos que estamos considerando tienen en su coordenada j-ésima, luego tienen al menos un 1). Notemos entonces ahora que para k fijo, existen $\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ vectores que cumplen que $u(x) = k$ y que $x_j = 1$ (esto pues tenemos n-1 coordenadas libres, de las cuales tenemos que extraer k-1 para que tengan los unos que faltan). Además, para cada elemento x que cumple $u(x) = k$, se tendrá que $\mathbb{P}(\{x\}) = p^k(1-p)^{n-k}$ (por la definición de $\mathbb{P}$, notar que $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$). Luego, para k fijo, tendremos que $\mathbb{P}(\{x \in \Omega_0 : x_j = 1\} \cap \{x \in \Omega_0 : u(x) = k\}) = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$. Luego, $\mathbb{P}(X_j = 1) = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} p^{k+1}(1-p)^{n-1-k} = p\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-1-k} = p(p+1-p)^{n-1} = p$. *(2.5 ptos)*

b)

Recordemos que $(X_j : j = 1, ...N)$ serán independientes si y sólo si $\forall a_1, ..., a_N \in \{0, 1\}$, se cumple que $\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_N = a_N) = \mathbb{P}(X_1 = a_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_N = a_N)$. Llamemos q a la cantidad de a_j's que son 1, y por ende N-q será la cantidad de a_j's que son cero (notar que $q = \sum_{j=1}^{N} a_j$) .

Notemos ahora que el lado derecho de la igualdad ya lo conocemos, pues por la parte *i)* X_j se distribuye como una Bernouilli de parámetro p para todo j, luego $\mathbb{P}(X_j = 0) = (1-p)$, $\mathbb{P}(X_j = 1) = p$. Por lo tanto, el lado derecho de la igualdad a la que queremos llegar vale $p^q(1-p)^{N-q}$ (dado que hay q 1's y n-q 0's).

Para el lado izquierdo, procederemos de forma similar a la que procedimos en la parte *i)*. Así, $\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_N = a_N) = \mathbb{P}(\{x \in \Omega_0 : x_j = a_j \forall j = 1, ..., N\})$. Notamos entonces que hay sólo un vector en Ω_0 que tiene esas coordenadas (pues están todas fijas), que tiene q 1's y n-q 0's, luego su probabilidad es precisamente $p^q(1-p)^{N-q}$, i.e., $\mathbb{P}(X_1 = a_1, ..., X_N = a_N) = p^q(1-p)^{N-q}$, que es justamente a lo que queríamos llegar. *(3 ptos).*