**Universidad de Chile** **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

# Control 2, Probabilidades y Procesos Estocásticos MA-34A, 12/05/2008

Profesor: Servet Martínez
Profesor Auxiliar: Andrés Fielbaum

**P1.-** Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Recuerde que dos conjuntos $F_1$ y $F_2 \in \mathcal{B}$ se dicen $\mathbb{P}-$independientes ssi $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1) \cdot \mathbb{P}(F_2)$. Este concepto se puede extender a $\sigma-$ álgebras. Considere entonces $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ dos $\sigma-$álgebras contenidas en $\mathcal{B}$. Diremos que ellas son $\mathbb{P}-$independientes si se verifica

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2)\,, \quad \forall\, B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\,.$$

Pruebe que dos conjuntos $A_1$, $A_2$ en $\mathcal{B}$ son $\mathbb{P}-$independientes si y solo si las $\sigma-$álgebras $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_1^c\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, A_2, A_2^c\}$ son $\mathbb{P}-$independientes.

Nota: En este ejercicio fue probado que dos eventos $E_1, E_2$ son independientes si y solamente si $\sigma(\{E_1\})$ y $\sigma(\{E_2\})$ (las $\sigma-$ álgebras generadas) lo son.

**P2.-** **a.-** Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria que se distribuye según una Uniforme en $(0,1)$. Considere $\lambda > 0$ fijo. Defina

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1-X)\,.$$

Pruebe que $Y$ se distribuye según una ley de probabilidad Exponencial($\lambda$).
*Nota:* La función de distribución $F$: es Uniforme en $(0,1)$ si tiene densidad $f = \mathbf{1}_{(0,1)}$, y es Exponencial($\lambda$) si tiene densidad $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}$.

**b.-** Sea $Z$ una variable aleatoria que se distribuye según una Exponencial($\lambda$). Pruebe que se verifica

$$\mathbb{P}\{Z > s+t \,|\, Z > t\} = \mathbb{P}\{Z > s\} \;\; \forall\, s,t > 0\,.$$

**P3.-** Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ es absolutamente continua y estrictamente creciente. Defina la variable aleatoria $Y = F_X \circ X$, es decir $Y(\omega) = F_X(X(\omega))$ para todo $\omega \in \Omega$. Pruebe que $Y$ tiene distribución Uniforme en $(0,1)$.

*Hint:* Puede utilizar que en este caso $F_X : \mathbb{R} \to (0,1)$ es biyección estrictamente creciente y que su inversa $F_X^{-1}$ también es estrictamente creciente.

**P4.-** Sea $N \geq 1$ y $p \in (0,1)$. Considere el conjunto $\Omega_0 = \{0,1\}^N$, cada uno de sus puntos será denotado por $x = (x_i : i = 1 \cdots, N)$. Como es habitual $\mathcal{P}(\Omega_0)$ denota el conjunto de partes de $\Omega_0$. En $(\Omega_0, \mathcal{P}(\Omega_0))$ coloque la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ siguiente,

$$\mathbb{P}(\{x\}) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \;\; \forall\, x \in \Omega_0\,.$$

Para $j \in \{1, \cdots, N\}$, denote por $X_j : \Omega_0 \to \{0,1\}$ la proyección en la $j-$ésima coordenada, es decir $X_j(x) = x_j$.

**a.-** Pruebe que $X_j$ es una variable aleatoria tal que $X_j \sim$ Bernoulli($p$).

**b.-** Pruebe que las variables aleatorias $(X_j : j = 1, \cdots, N)$ son independientes.

- *Nota:* Esto es, debe mostrar

$$\mathbb{P}\{X_j = r_j, j = 1, \cdots, N\} = \prod_{j=1}^{N} \mathbb{P}\{X_j = r_j\}\,, \quad \forall\, (r_1, \cdots, r_N) \in \{0,1\}^N\,.$$

**Tiempo:** 3:00 horas.
*Nota:* Todas las preguntas tienen igual valor y al interior de cada pregunta cada parte tiene igual valor.