

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Examen Recuperativo, Probabilidades y Procesos Estocásticos

MA-34A, Otoño 2008

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ

PROFESOR AUXILIAR: ANDRÉS FIELBAUM

P1.- Se lanza un dado que tiene 6 lados y cada uno de los valores $1, \dots, 6$ es tomado de manera equiprobable. Denote por i el resultado obtenido en el dado. Enseguida se tiran tres monedas (cuyo resultado es cara ó sello) de manera independiente y con probabilidad de obtener cara igual a $\frac{i}{6}$, en cada una de las monedas. Calcule la probabilidad de que i sea impar si es que al menos salió un sello en las tres monedas.

P2.- Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, con distribución común $\exp(\lambda)$ (es decir tienen densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$). Defina $X = \max(X_1, X_2)$. Calcule $\mathbb{E}(X)$.

P3.- Sea Z una variable aleatoria a valores en $\{1, 2, \dots\}$, con densidad de probabilidad dada por:

$$p(k) = \mathbb{P}\{Z = k\} = \frac{1}{(e-1)k!}, \quad k \geq 1.$$

Considere una secuencia $(U_i : i \geq 1)$ de variables aleatorias i.i.d. e independientes de Z , tal que $U_i \sim \text{Uniforme}[0, 1]$. Defina la variable aleatoria U_Z por $U_Z = U_k$ si $Z = k$. Ahora considere la variable aleatoria,

$$X = \sup(U_1, \dots, U_Z).$$

Observe que X toma valores en $[0, 1]$. Pruebe que X tiene densidad f dada por

$$f(x) = \frac{e^x}{e-1} \mathbf{1}_{[0,1]}.$$

Tiempo: 2 horas.

Nota: Las tres preguntas tienen igual valor.