Pauta P3 Examen

a)

a1) Si llamamos $h(x) = x/log(x)$, tendremos que $h'(x) = \frac{log(x) - x\frac{1}{x}}{(log(x))^2} = \frac{log(x)-1}{log^2(x)}$. Pero log es una función estrictamente creciente, y $log(e) = 1 \Rightarrow \forall x > e, h'(x) > 0 \Rightarrow h$ es creciente a partir de $x = e$. Pero $3 > e$, luego h es creciente para $x \geq 3$. *(1 pto).*

a2) $\sum_{i=2}^{n} \frac{i}{log(i)} = 2/log(2) + \sum_{i=3}^{n} \frac{i}{log(i)}$. Pero por la parte a1), tendremos que $\forall i = 3, ..., n, i/log(i) \leq n/log(n)$, y así lo que tenemos resulta $\leq 2/log(2) + \sum_{i=3}^{n} \frac{n}{log(n)} = \frac{2}{log(2)} + (n-2) \cdot \frac{n}{log(n)}$. *(1 pto).*

b)

Notar que $\forall i, \mathbb{E}(X_i) = -i\mathbb{P}(X_i = -i) + 0\mathbb{P}(X_i = 0) + i\mathbb{P}(X_i = i) = \frac{-1}{2log(i)} + \frac{1}{2log(i)} = 0$. Luego $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$. *(0.5 ptos).*

Para la varianza, notar que por independencia, $Var(S_n) = \sum_{i=2}^{n} Var(X_i)$. Pero $Var(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2)$ (pues son de media nula) $= (-i)^2\mathbb{P}(X_i = -i) + (i)^2\mathbb{P}(X_i = i) = i/2log(i) + i/2log(i) = \frac{i}{log(i)}$. Luego, $Var(S_n) = \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{log(i)} \leq \frac{2}{log(2)} + (n-2) \cdot \frac{n}{log(n)}$ (parte **a**). *(1.5 ptos).*

c)

Utilizando la desigualdad de Chevychev, tenemos que $\mathbb{P}(\frac{|S_n|}{n} > \epsilon) = \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(S_n/n)| > \epsilon) \leq \frac{Var(S_n/n)}{\epsilon} = \frac{Var(Sn)}{n^2\epsilon} \leq \frac{2}{\epsilon n^2 log(2)} + \frac{(n-2)n}{n^2 \epsilon log(n)} \leq \frac{2}{\epsilon n^2 log(2)} + \frac{n^2}{n^2 \epsilon log(n)} = \frac{2}{\epsilon n^2 log(2)} + \frac{1}{\epsilon log(n)} \to 0$ (cuando $n \to \infty$). *(2 ptos).*