Pauta P4 Examen

a)

Por linealidad: $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(g(U_i))$. Pero $\mathbb{E}(g(U_i)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f_{U_i}(u)du$, donde f_{U_i} es la densidad de la variable aleatoria U_i. Pero U_i tiene distribución uniforme en $[0,1] \Rightarrow f_{U_i}(u) = 1_{[0,1]}(u) \Rightarrow \mathbb{E}(g(U_i)) = \int_0^1 g(u)du = \alpha$. Así, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{n} = n\alpha/n = \alpha$. *(1 pto).*

Por independencia: $Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} Var(\frac{g(U_i)}{n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(g(U_i))$. Pero $Var(g(U_i)) = \mathbb{E}(g^2(U_i)) - \mathbb{E}^2(g(U_i)) = \mathbb{E}(g^2(U_i)) - \alpha^2$. Además $\mathbb{E}(g^2(U_i)) = \int_0^1 g^2(u)du$ (notando que por los mismos motivos anteriores, la densidad de la uniforme nos deja esta expresión). Pero $g(u) \in [0,1] \forall u \in [0,1]$, por lo que tenemos que $g^2(u) \leq g(u) \forall g \in [0,1]$, luego $\mathbb{E}(g^2(U_i)) = \int_0^1 g^2(u)du \leq \int_0^1 g(u)du{=}\alpha$. Así, $Var(Y) \leq sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}(\alpha - \alpha^2) = \frac{n}{n^2}(\alpha - \alpha^2) = \frac{1}{n}\alpha(1-\alpha)$. *(2 ptos).*

b)

Probemos primero que $\mathbb{P}(U_i \leq g(V_i)) = \alpha$. En efecto, notemos que estamos calculando, para el vector aleatorio (U_i, V_i), $\mathbb{P}(U_i \leq g(V_i))$, luego tenemos que integrar su densidad sobre la región de $\mathbb{R}^2$ en que $U_i \leq g(V_i)$. Así, notamos que V_i puede moverse por todos los reales, y que U_i debe caer en el intervalo $(-\infty, g(V_i))$. Además, notamos que la densidad conjunta, por independencia, está dada por $f_{U_iV_i}(u,v) = f_{U_i}(u)\cdot f_{V_i}(v) = 1_{[0,1]}(u)1_{[0,1]}(v)$, luego la probabilidad buscada está dada por $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{g(v)} 1_{[0,1]}(u)1_{[0,1]}(v)dudv = \int_0^1\int_0^{g(v)} dudv = \int_0^1 g(v)dv = \alpha$.

Teniendo esto, notamos que $\mathbb{E}(1_{U_i \leq g(V_i)}) = 0\mathbb{P}(U_i > g(V_i)) + 1\mathbb{P}(U_i \leq g(V_i)) = \alpha$. Luego, por linealidad, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(1_{U_i \leq g(V_i)}) {=} \frac{n\alpha}{n} = \alpha$. *(1 pto).*

Por último, notamos que Var(1_{U_{i}\leq g(V_{i})}) $= \mathbb{E}((1_{U_i \leq g(V_i)})^2) - \mathbb{E}^2(1_{U_i \leq g(V_i)})$. Pero $1^2_{U_i \leq g(V_i)} = 1_{U_i \leq g(V_i)}$ (pues sólo puede tomar valores *0* o *1*), por lo que $Var(U_i) = \alpha - \alpha^2$. Así, por independencia, $Var(Z) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(U_i) = \frac{n}{n^2}(\alpha - \alpha^2) = \frac{\alpha(1-\alpha))}{n^2}$