

Examen MA34A-01
25 de Noviembre de 2005

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ

AUXILIARES: BOLÍVAR DÍAZ L., FRANCISCO SILVA A.

P1.- Considere el vector aleatorio (X, Y) con densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$. Ahora fije $x, y \in D$.

- i) Calcule la densidad condicional $f_{X|Y}(x|y)$.
- ii) Calcule la esperanza condicional $\mathbb{E}(X|Y = y)$.
- iii) Calcule la varianza condicional $Var(X|Y = y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|Y = y)]^2|Y = y)$.

P2.-

- i) Sea X una v.a. discreta que se distribuye según una Poisson de parámetro λ . Calcule su función generadora de momentos $\mathbb{E}(s^X)$ para $s \in (0, 1]$.
- ii) Sean X e Y dos v.a.'s independientes que se distribuyen según una Poisson de parámetros λ y μ respectivamente. Muestre que la v.a. $X + Y$ es Poisson de parámetro $\lambda + \mu$.
- iii) Sea $n \geq 0$ fijo. Pruebe que la distribución de X dado $X + Y = n$ es una distribución binomial. Encuentre sus parámetros.

P3.-

- i) Sea Y una variable que toma los valores $\{1, -1\}$ con igual probabilidad, esto es $\mathbb{P}\{Y = 1\} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{Y = -1\}$. Sean $(Y_n : n \geq 1)$ una secuencia de variables aleatorias independientes, todas ellas con la misma distribución de Y . Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Probar que $\mathbb{E}(e^{\beta Y}) = \cosh \beta$ y que $\mathbb{E}(e^{\beta \sum_{i=1}^n Y_i}) = (\cosh \beta)^n$.
- ii) Ahora considere $\beta > 0$ y $\epsilon > 0$. Pruebe que $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n Y_i > \epsilon n\} \leq e^{-\beta \epsilon n} \mathbb{E}(e^{\beta \sum_{i=1}^n Y_i})$ y deduzca que $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n Y_i > \epsilon n\} \leq e^{-\beta \epsilon n} (\cosh \beta)^n$.
- iii) Use que $(2n)! \geq 2^n n!$ (si le sobra tiempo muéstrela por inducción) para probar que $\cosh x \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ para todo $x \geq 0$. Concluya que $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n Y_i > \epsilon n\} \leq e^{-\beta \epsilon n} e^{\frac{\beta^2}{2} n}$.
- iv) Deduzca que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n Y_i > \epsilon n\} \leq e^{-\delta n}$.

Nota. Como también se puede hacer el argumento simétrico se ha probado el resultado siguiente para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\mathbb{P}\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i| > \epsilon\} \leq e^{-\delta n}$.

Cada problema tiene igual ponderación, y cada parte de un problema tiene la misma ponderación al interior de este.

Tiempo 3 horas