Examen Recuperativo MA34-A

Profesor: Servet Martínez

Auxiliares: Andrés Fielbaum, Tomas Spencer

Instrucciones: El examen consta de 3 preguntas, de las cuáles usted debe escoger y contestar solamente 2. Si contesta las 3, se considerarán las 2 con peor puntaje. Para aprobar necesitan de una nota 4.0 en este examen. ¡Suerte!

P1

Sea $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Para $A \in \mathfrak{B}$, definimos la función indicadora de A por $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\, \omega \in A \\ 0 & \sim \end{cases}$.

i) Demuestre que 1_A sigue una distribución de Bernouilli de parámetro p, y encuentre el valor de p

ii) Demuestre que los eventos A y B son independientes si y solamente si $Cov(1_A \cdot 1_B) = 0$.

P2

i) Sea X una variable aleatoria, tal que $X \sim Poisson(\lambda)$. Calcule su función generadora de momentos $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

ii) Demuestre, usando funciones generadores de momentos, que si Y v.a. independiente de X es tal que $Y \sim Poisson(\mu)$, entonces $Z = X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$

iii) Pruebe que la densidad de probabilidad condicional $p_{X|Z}(k|n)$ corresponde a la de una binomial, y encuentre sus parámetros.

P3

Sea *(X, Y)* un vector aleatorio discreto, con función de densidad de probabilidad dada por:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2}$$

i) Calcule las funciones de densidad de probabilidad $p_{X|Y}(x|0)$, $p_{X|Y}(x|1)$

ii) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = 1)$.

Nota: Recuerde que X v.a. discreta se dice que sigue una distribución de tipo $Poisson(\lambda)$ si y sólo si $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ para $k \in \mathbb{N}$ (incluyendo el cero).

Tiempo: 2 horas.