EXAMEN MA34-A, 2007/2

Prof. Servet Martínez, Prof. auxiliares: Andrés Fielbaum, Tomás Spencer

1. Considere el vector aleatorio (X, Y) tomando valores en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$, con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \sim \end{cases}$$

i) Encuentre las densidades marginales $f_X(x)$, $f_Y(y)$.
ii) Encuentre las densidades condicionales $f_{X \mid Y}(x \mid y)$, $f_{Y \mid X}(y \mid x)$.
iii) Calcule $\mathbb{P}(Y \leq y \mid X = x)$.
iv) Calcule $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.

2. Considere las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ independientes, idénticamente distribuídas absolutamente continuas, cuyas funciones de densidad y de distribución denotamos respectivamente por f y F. Defina la variable aleatoria $Y = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$. (Observe y use si le es cómodo, que como las variables aleatorias son absolutamente continuas se puede suponer que Y es alcanzado por un único X_i.)
Pruebe que Y tiene densidad dada por

$$f_Y(y) = nf(y)(1 - F(y))^{n-1}.$$

3. Sea Z variable aleatoria con $Z \sim N(0, 1)$, es decir cuya densidad de probabilidad es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Muestre que $Cov(Z, Z^2) = 0$.

ii) Observe que $\mathbb{P}(\{Z = 0\}) = 0$, entonces puede suponer que Z toma valores reales distintos de 0. Defina $\text{sign}(Z) = 1$ si $Z > 0$ y $\text{sign}(Z) = -1$ si $Z < 0$.
Pruebe que las variables aleatorias $\text{sign}(Z)$ y Z^2 son variables aleatorias independientes.

Hint: Puede probar que $\mathbb{P}(\{\text{sign}(Z) = 1\}) = \mathbb{P}(\{\text{sign}(Z) = -1\})$ y que para todo $B \subseteq (0, \infty)$ se cumple

$$\mathbb{P}\left(\{\text{sign}(Z) = 1, Z^2 \in B\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\text{sign}(Z) = -1, Z^2 \in B\}\right).$$

4. Considere $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere los polinomios de Bernstein asociados a f,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k (1 - x)^{n-k}$$

Ahora, para cada $x \in [0, 1]$ fijo, considere una sucesión de variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n, \cdots$, independientes entre sí y con la misma distribución Bernoulli(x).

(i) Muestre que $B_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{1}{n}\left(X_1 + ... + X_n\right)\right)\right)$.

(ii) Asuma que el **Lema** que sigue es cierto y úselo, sin necesidad de demostrarlo, para probar que $\forall x \in [0, 1$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$.

Lema. Sea $(Z_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de variables aleatorias donde cada una de ellas toma valores en un intervalo $[a, b]$. Si $\exists\ c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = c$ en Probabilidad, es decir $\forall \varepsilon > 0$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{|Z_n - c| > \varepsilon\}\right) = 0$, entonces para toda función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = g(c)$.

Nota: En la parte (ii) probó que para toda función continua existe una sucesión de polinomios convergiendo a ella.

Tiempo: 3 horas. Cada problema tiene igual valor, y cada parte de cada problema tiene el mismo valor en éste.