GUIA PARA EL EXAMEN MA34-A

Profesor: Servet Martínez   Auxiliar: Andrés Fielbaum

1

a) Sean *(X,Y)* v.a. independientes, absolutamente continuas. Determine (cuando sea necesario, dejando expresada la integral):

i) $\mathbb{P}(X < Y)$

ii) $\mathbb{P}(|X - Y| < \epsilon)$

iii) $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$

iv) $\mathbb{P}(X + 2Y \geq 1)$

v) $\mathbb{P}(sin(Y) > X)$

(Indicación: puede ser útil hacer el gráfico en $\mathbb{R}^2$ para saber sobre que región deben integrar).

b) Evalúe sus cálculos de la parte **a)** si X sigue una distribución uniforme en $[0,1]$*,* Y sigue una uniforme en $[0,2]$.

c) Repita lo hecho en la parte **a)** si ahora X, Y toman valores en los enteros.

2

Suponga que se realiza n veces el mismo experimento que tiene sólo dos resultados posibles, A y B. Suponga que el resultado de cada experimento es independiente del resultado en los demás. Suponga que, en cada experimento, la probabilidad de que ocurra A es p, con $0<p<1$. Definamos $C_n = |\{i = 1, ..., n :$ el resultado del evento i-ésimo fue $A\}|$, es decir, los casos favorables hasta el i-ésimo experimento. Pruebe que $lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n} = p$.

Hint: Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina la variable aleatoria X_i, dada por $X_i = 1$ si el resultado del i-ésimo experimento fue A, $X_i = 0$ si el resultado del i-ésimo experimento fue B.

3

Sea T una variable aleatoria absolutamente continua. Pruebe que:

$$T \text{ sigue una distribución exponencial } \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\{T > t + s | T > s\}) = \mathbb{P}(\{T > t\}) \quad \forall t, s \in [0, \infty).$$

Hint: Para la implicancia $\Leftarrow$, utilice el siguiente resultado del análisis real: Si $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, es una función continua, decreciente, no idénticamente cero y que cumple $g(t + s) = g(t)g(s)$ $\forall t, s \in [0,\infty)$, entonces necesariamente $g(t) = e^{-\lambda t}$, para algún $\lambda > 0$.

4

i) Sea X una variable aleatoria, tal que $X \sim Poisson(\lambda)$. Calcule su función generadora de momentos $G_X(t)$.

ii) Demuestre, usando funciones generadores de momentos, que si Y v.a. es tal que $Y \sim Poisson(\mu)$, entonces $Z = X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$

iii) Pruebe que la densidad de probabilidad condicional $p_{X|Z}(k|n)$ corresponde a la de una binomial, y encuentre sus parámetros.

5

i) Una familia tiene n hijos con probabilidad $\alpha \cdot p^n$, donde $\alpha < \frac{1-p}{p}$. Calcule la probabilidad de que una familia no tenga hijos.

ii) Sea X variable aleatoria con función de distribución F. Defina $Y = X^2$. Calcule la función de distribución de Y.

6

Sea $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Para $A \in \mathfrak{B}$, definimos la función indicadora de A por $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\, \omega \in A \\ 0 & \sim \end{cases}$.

i) Demuestre que 1_A sigue una distribución de Bernouilli de parámetro p, y encuentre el valor de p

ii) Demuestre que los eventos A y B son independientes si y solamente si $\mathbb{E}[(1_A - \mathbb{E}(1_A))(1_B - \mathbb{E}(1_B)) = 0$

7

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Sean $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $\mathbb{P}(A) = 0, \mathbb{P}(B) = 1$. Pruebe que $\forall C \in \mathcal{B}$, C es independiente de A y C es independiente de B.

8

Se realizan una serie de lanzamientos independientes de una moneda cuya probabilidad de que salga cara es p. Llamemos P_n a la probabilidad que justo después del n-ésimo tiro, hayan salido una cantidad par de caras.

i) Pruebe que $\forall n \geq 1, P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1}$

ii) Concluya por inducción que $P_n = \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n)$. Interprete los casos $p = 0, p = 1, p = \frac{1}{2}$.

9

Un cierto producto funciona con una pila (una a la vez), que tiene una duración antes de fallar dada por la variable aleatoria X, absolutamente continua y con densidad $f_X(x) = 2x$ para $0 < x < 1$. Cuando una pila falla, es remplazada en forma inmediata. Llamemos X_i el tiempo que dura la i-ésima pila, luego $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ indica el tiempo de la n-ésima falla. Se defina la tasa de falla del sistema (r) por

$$r = lim_{n \to \infty} \frac{n}{S_n}$$

Suponiendo que los tiempos de duración de cada pila son independientes, determine el valor de r.

10

Se dice que X v.a. absolutamente continua sigue una distribución $pareto(x_0, \alpha)$ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & si\, x > x_0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Pruebe que si X sigue una distribución $pareto(x_0, \alpha)$, entonces $ln(X) \sim exp(\alpha)$. Calcule $\mathbb{E}(X), Var(X)$.

11

Sea X v.a. discreta a valores en $\mathbb{N}$. Sea $Y \sim Geometrica(1-s)$. Notemos por G_X a la función generadora de momentos de X. Muestre que

$$G_X(s) = \mathbb{P}(X < Y).$$

12

Para X .a. positiva, se define la función de azar de X por:

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$$

Donde f_X y F_X representan la función de densidad y de distribución de X, respectivamente.
i) Pruebe que $e^{-\int_0^x h(t)dt} = 1 - F_X(x)$
ii) Pruebe que si $X \sim exp(\lambda)$, entonces $h_X = cte$

13

Sean X_1, X_2 v.a.'s i.i.d., cada una con distribución uniforme en [0,1]. Sea $X_3 = \frac{mas\{X_1,X_2\}}{min\{X_1,X_2\}}$. Encuentre la función de densidad de X_3, $f_{X_3}(x_3)$.

14

(Convergencia de la geométrica a la exponencial)

En este problema probaremos que existe una cierta convergencia de la distribución geométrica a la exponencial. Para cada $\delta > 0$, considere X_δ una variable aleatoria discreta, tal que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P\{(X_\delta = \delta k)\} = (1-p_\delta)^{k-1} p_\delta$ (es decir, una variable aleatoria similar a una geométrica de parámetro p_δ, pero que donde se hace un experimento cada δ "instantes"). Sea $\lambda > 0$ fijo.
i) Pruebe que $P(X_\delta > n\delta) = (1-p_\delta)^n$.
ii) Pruebe que $\mathbb{E}(X_\delta) = \frac{\delta}{p_\delta}$. Hint: $\sum_{k=1}^\infty a_k k = \frac{d}{dx}(\sum_{k=1}^\infty a_k x^k)|_{x=1}$.

Suponga ahora que $\forall \delta > 0$, $p_\delta = \frac{\delta}{\lambda}$. Note que con esto, $\mathbb{E}(X_\delta) = \lambda \; \forall \delta$.

iii) Defina $t = n\delta$ (intuitivamente, en un tiempo t habrán $n\delta$ experimentos). Pruebe entonces que $lim_{\delta \to 0} P(X > t) = e^{-\lambda t}$.

Note que probó que, en cierto modo, la distribución geométrica tiende a una exponencial.

15

Pablo está resolviendo una guía de alternativas, y no sabe una respuesta a una pregunta de 9 alternativas; está tan perdido, que asigna probabilidad $\frac{1}{9}$ a cada alternativa. Para saber la respuesta, ve las respuestas de dos de sus compañeros que responden en forma independiente: Pedro, que responde correctamente $\frac{3}{4}$ de las veces, y Ana, que responde correctamente $\frac{4}{5}$. Si ambos respondieron la alternativa a), calcule la probabilidad de que esa sea la respuesta correcta.

16

Considere la función $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{(x-1)} e^{-t} dt$.

i) Muestre que $\forall x$, $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$. Concluya que si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

ii) Definimos la distribución $\Gamma(k, \lambda)$ aquella cuya función de densidad es $f(x) = \lambda^k e^{-\lambda x} \frac{(x\lambda)^{k-1}}{\Gamma(k)}$ para x positivo. Pruebe que si X sigue una distribución $\Gamma(k, \lambda)$ y k es natural, entonces $\mathbb{E}(X) = k/\lambda, Var(X) = k/\lambda^2$.

17

Sean $X_1, ...X_n$ variables aleatorias independientes, tales que $X_i \; Binomial(n, p_i)$ $\forall i$. Sea $r > 0$ y defina $X = X_1 + ... + X_n$, $\mu = \mathbb{E}(X)$. En este problema probaremos que dado $t > 0$, $\mathbb{P}(X \geq (1+r)\mu) \leq \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(a+r)\mu}}$. $(\star)$.

i) Pruebe que $\forall i, \mathbb{E}(e^{tX_i}) = (1 + p_i(e^t - 1))^n$.

ii) Pruebe que $\mathbb{P}(X \geq (1+r)\mu) \leq \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i})}{e^{t(1+r)\mu}}$

iii) Usando la conocida desigualdad $(1+x) \leq e^x$, concluya la desigualdad $(\star)$. *Hint: Recuerde que si Y˜Binomial(m,q), entonces $\mathbb{E}(Y) = mq$.*

18

Rehaga la demostración de la *Ley Débil de los Grandes números,* esto es, que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d., todas de media finita igual a μ, entonces $\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|\frac{1}{n}S_n - \mu| > \epsilon) \to 0$, donde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. *Hint: Use la desigualdad de Chevychev.*

19

Usted dispone de dos monedas, una normal y una con dos caras. Si saca una al azar, la tira n veces y en todas saca cara, ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido la moneda trucada?.

20

Se tienen n urnas, cada una con i bolas negras y k rojas. Suponga que de la primera urna extrae una bola roja y la pone en la segunda. Tras esto, saca una bola al azar de la segunda y la pone en la tercera. Luego saca una bola al azar de la tercera y la pone en la cuarta, y así sucesivamente, va sacando siempre una bola al azar de la j-ésima urna y la pone en la siguiente, hasta llegar a la última. Si ahora saca una bola de la última urna, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?. ¿Qué ocurre cuándo $n \to \infty$?.