Problema Pendiente Auxiliar 12 de Junio

El problema que estábamos resolviendo era el siguiente:

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución tipo $Bernouilli(p)$. Sea $Z = inf\{n \geq 2 : X_n = 0, X_{n-1} = 1\}$. Calcule la transformada de Laplace $\psi_Z = \mathbb{E}(e^{-tZ})$ y deduzca la media y varianza de Z. *Hint: Defina* $H = inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$, $K = inf\{n > H : X_n = 0\} - H$, *pruebe que son independientes y que Z=H+K.*

En la auxiliar probamos que son independientes, nos faltaba probar que efectivamente *H+K=Z*. Dado que Z es el mínimo de un conjunto (pues por ser subconjuntos de los naturales, hablar de ínfimo o mínimo es equivalente), lo que debemos probar es que H+K pertenece a ese conjunto y que es el menor de todos. Veamos primero entonces H+K pertenece a ese conjunto, i.e., que $X_{H+K} = 0, X_{H+K-1} = 1$. En efecto, notemos que $H + K = inf\{n > H : X_n = 0\}$. Es decir, H+K es el mínimo de un conjunto, en particular, pertenece a él. Es decir, H+K es tal que es mayor que H y también es tal que $X_{H+K} = 0$ (que es la primera condición que queremos probar). Para la segunda, notemos que si *K=1*, entonces $X_{H+K-1} = X_H$. Pero nuevamente, H es el mínimo de un conjunto, en particular está en él, luego debe cumplir que $X_H = 1$ (en el fondo, recordar que la variable H nos entrega cuando fue el primer 1, en particular es un 1). Si *K>1,* ysi suponemos que $X_{H+K-1} = 0$, entonces $H + K - 1 > H$ y $X_{H+K-1} = 0 \Rightarrow H + K - 1 \in \{n > H : X_n = 0\}$. Pero $H + K - 1 < H + K$, lo cual es una contradicción, pues H+K es el menor elemento de ese conjunto. Así, concluimos que $X_{H+K-1} = 1$.

Veamos ahora que H+K es el menor término que cumple lo recién probado. Sea M un natural cualquiera que lo cumple, i.e., que $X_M = 0, X_{M-1} = 1$. En particular, por definición de H (primer entero n tal que $X_n = 1$), tendremos que $M - 1 \geq H \Rightarrow M > H$. Pero por definición de K, K+H es el primer entero n mayor que H que cumple $X_n = 0$. Como $M > H$ y cumple $X_M = 0$, concluimos entonces que $K + H \leq M$, que es lo que queríamos probar.

Las partes que faltan quedan propuestas como ejercicio, pues teniendo ya las distribuciones de K y H no es díficil y es algo que deben saber para el control.

Si este problema les asusta mucho, no se preocupen, pues obviamente el objetivo de la prueba no es demostraciones de este estilo, sino saber calcular bien las partes más “probabilísticas” (por ejemplo, lo de la independencia debieran ser capaces de hacerlo, aunque no era un ejercicio fácil en absoluto). Por lo mismo, en un control o bien les diríamos que asuman que esto de la suma es cierto, o aceptaríamos una demostración más intuitiva, en el fondo explicando lo que son H, K y mostrando entonces porqué debe cumplirse que su suma es igual a Z (en el fondo, basándose en esa secuencia que pusimos en la pizarra). Aunque de todos modos, la demostración no es mucho más que formalizar esas ideas, sí contiene algunos pasos un poquito más tediosos y técnicos y que realmente no revelan mucho acerca de su conocimiento de las probabilidades, por lo que realmente algo así no teman encontrarlo.