Control 3 MA34-A, 2007/2

Prof. Servet Martínez, Prof. auxiliares: Andrés Fielbaum, Tomás Spencer

P1 Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discreta dadas por:

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \mathbb{P}\{Y = k\} = p(1-p)^k,\ k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

i) Encuentre la densidad discreta de $X + Y$ en $\{0, 1, 2, ...\}$.

*ii)*Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X = k\ |X + Y = n) = \frac{1}{n+1},\ \ k, n \in \{0, 1, 2, ...\}, k \leq n.$$

P2 Sea Y una variable aleatoria absolutamente continua con densidad de probabilidad simétrica con respecto a $\alpha \in \mathbb{R}$: $f_Y(\alpha + x) = f_Y(\alpha - x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

i) Sea $X = Y - \alpha$. Pruebe que su funcion de densidad f_X es simétrica con respecto a 0, es decir $f_X(x) = f_X(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nota: Es útil considerar la igualdad $Y = X + \alpha$: una variable aleatoria con densidad de probabilidad simétrica con respecto a α es la trasladada en α de una variable aleatoria con densidad de probabilidad simétrica con respecto a 0.

ii) Suponga que $\mathbb{E}(X)$ existe, pruebe que $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\mathbb{E}(Y) = \alpha$

iii) Pruebe que la función característica $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY})$, $t \in \mathbb{R}$, verifica $\varphi_Y(t) = h(t)e^{i\alpha t}$ donde $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tomando valores reales.

P3 Sea X variable aleatoria con $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$. Sea $a > 0$.

i) Pruebe que

$$\forall b > 0,\ \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \geq \mathrm{a}\}) \leq \frac{\sigma^2 + \mathrm{b}^2}{(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2}.$$

Hint: $X \geq a \Longleftrightarrow (X + b)^2 \geq (a + b)^2$.

ii) Escogiendo un $b > 0$ adecuado concluya que

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{X} \geq \mathrm{a}\}) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \mathrm{a}^2}.$$

P4 *i)* Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes, $X_k \sim \text{Normal}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \cdots, n$. Pruebe, usando funciones características, que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \text{Normal}(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2).$$

Hint: Recuerde que si $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$, entonces su función característica es $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$.

ii) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución Normal(μ, σ^2). Definamos $\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} X_k/n$. Pruebe que $\overline{X} \sim \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Hint: Puede usar la parte *i)* y que Y normal implica aY es normal, para $a \neq 0$.

Tiempo: 3 horas.

Nota: Todos los problemas tienen el mismo valor (1.5 punto) y al interior de cada problema las partes tienen igual valor, a excepción del problema 3, en que la parte i) vale 1 punto y la parte ii) vale 0.5 punto.