| Universidad de Chile | Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas |
|---|---|

# Pauta Control 3, Probabilidades y Procesos Estocásticos
## Octubre, 2004

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: José Luis González, José Muñoz

**P1.-** Sea $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Recuerde que $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si tiene densidad $f_Z$ que verifica:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad z \in \mathbb{R} .$$

Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y defina $Y = \mu + \sigma X$.

(a) Pruebe que $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

**Solución**

Para deducir que $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ usaremos la funcion distribución de la variable $Y$. Se tiene

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(\mu + \sigma X \le t) = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

Como $X$ tiene densidad se tiene que

$$\mathbb{P}\left(X \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} f_X(x)dx.$$

Y como $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ se tiene

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Luego, juntando todo se tiene que

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Realizando el cambio de variables $y = \mu + \sigma x$, el cual verifica $dy = \sigma dx$ y $x = \frac{y-\mu}{\sigma}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}} dy.$$

Definiendo $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}$ se tiene que

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)dy$$

Y esto ultimo es valido para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Luego se deduce que $f_Y(y)$ es la funcion densidad de la variable aleatoria $Y$, lo cual dice que $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

(b) Pruebe que la función $\beta_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ con $t \in \mathbb{R}$, verifica $\beta_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

**Solución**

Se tiene por definicion

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Esta ultima igualdad es porque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{-t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{2tx-x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} 2 e^{\frac{2tx-x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t^2-2tx+x^2)}{2}} dx$$

Ahora, se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t^2-2tx+x^2)}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

Por otro lado se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$$

Donde en la ultima igualdad se uso el cambio de variables $x - t = y$
Con lo cual

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

(c) Pruebe que la función $\beta_Y(t) := \mathbb{E}(e^{tY})$ con $t \in \mathbb{R}$, verifica $\beta_Y(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

**Solución**

Se tiene

$$\mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{t(\mu+\sigma X)}) = \mathbb{E}(e^{t\mu} e^{t\sigma X}) = e^{t\mu}\mathbb{E}(e^{(t\sigma)X})$$

Donde se uso que la esperanza de una constante es la constante (en nuestro caso la constante es $e^{t\mu}$.
Ahora, identificando $\tilde{t} = t\sigma$ tenemos que

$$\mathbb{E}(e^{tY}) = e^{t\mu}\mathbb{E}(e^{\tilde{t}X}) = e^{t\mu} e^{\frac{\tilde{t}^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Donde se uso que $\mathbb{E}(e^{\tilde{t}X}) = e^{\frac{\tilde{t}^2}{2}}$, resultado que fue demostrado en la parte b.

(d) Pruebe que $\mathbb{E}(Y^2) = \beta''_Y(0) = \sigma^2 + \mu^2$.

**Solución**

Se tiene

$$\beta'_Y(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\beta_Y(t+h) - \beta_Y(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}(e^{(t+h)Y}) - \mathbb{E}(e^{tY})}{h} = \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left(\frac{e^{(t+h)Y} - e^{tY}}{h}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)Y} - e^{tY}}{h}\right)$$

Luego

$$\beta'_Y(t) = \mathbb{E}\big((e^{tY})'\big) = \mathbb{E}(Ye^{tY})$$

Del mismo modo $\beta''_Y(t) = \mathbb{E}(Y^2 e^{tY})$

Evaluando en $t = 0$ resulta $\beta''_Y(0) = \mathbb{E}(Y^2)$. Por otro lado, de la parte c sabemos que $\beta_Y(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$, luego

$$\beta''_Y(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right) = (\mu + t\sigma^2)^2 e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^2 e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Evaluando en $t = 0$ resulta

$$\mathbb{E}(Y^2) = \beta''_Y(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

**P2.-** Sea $X \sim \textbf{Binomial}(n, p)$ con $n \geq 1$, $0 < p < 1$. Considere $Y := \frac{1}{X+1}$.

(a) Demostrar que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{(n+1)p}\left(1 - (1-p)^{n+1}\right) .$$

**Solución**

Se tiene

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ahora multiplicando y dividiendo por $(n+1)$ tenemos que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Y luego

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k}$$

Donde en la ultima igualdad se multiplico y dividio por $p$ para crear en la sumatoria una especie de binomio de Newton.
Haciendo el cambio de variable $i = k + 1$ tenemos que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{(n+1)p}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{n+1-i}$$

Ahora, la sumatoria es un binomio de Newton sin el primer termino (el con $i = 0$) asi que sumemoslo y restemoslo para obtener

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{(n+1)p}\Big(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{n+1-i} - (1-p)^{n+1}\Big) = \frac{1}{(n+1)p}(1 - (1-p)^{n+1})$$

(b) Calcule la distribución de $Y$, más precisamente, identifique el conjunto numerable $\{a_i \in \mathbb{R} : i \in I\}$ tal que:

$$\mathbb{P}(Y = a_i) > 0 \ \text{ para } i \in I \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} \mathbb{P}(Y = a_i) = 1 .$$

**Solución**

Se tiene que para $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = i) > 0$, $\quad \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i) = 1$ pues $X \sim \textbf{Binomial}(n, p)$

Ahora $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\frac{1}{Y} - 1 = i) = \mathbb{P}(Y = \frac{1}{1+i}) > 0$ y ademas

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{1+i}\right)$$

Luego el conjunto buscado es $\{a_i = \frac{1}{1+i}; i \in \{1, ..., n\}\}$

**P3.-** Sea $X \sim$ **Exponencial**$(\lambda)$ con $\lambda > 0$, es decir, su densidad esta dada por $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ con $x \geq 0$.

(a) Calcular $Var(X)$.

**Solución**

Lo haremos segun el metodo de la funcion generadora de momentos, como fue visto en clase auxiliar.
Se tiene

$$\beta_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - t)x} dx$$

Supongamos $t < \lambda$, con lo cual $-(\lambda - t) < 0$. Luego

$$\beta_X(t) = \frac{\lambda}{t - \lambda}(\lim_{r \to \infty} e^{-(\lambda - t)r} - 1) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Donde se uso que $\lim_{r \to \infty} e^{-(\lambda - t)r} = 0$ pues $\lambda > t$.

Luego se tiene

$$\beta'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad \beta''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

Evaluando ambas expresiones en cero y usando que $Var(X) = \beta''_X(0) - \beta'_X(0)^2$ tenemos que

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(b) Sea $Y := e^X$. Probar que $Y$ tiene densidad dada por :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda y^{-(\lambda+1)} & y \geq 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$$

**Solución**

Supongamos $t \geq 1$. Se tiene

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq ln(t)) = F_X(ln(t))$$

Ahora, si $y \geq 1$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dt}(F_Y(y)) = \frac{d}{dt}(F_X(ln(y)) = f_X(ln(y))\frac{1}{y} = \lambda e^{-\lambda ln(y)}\frac{1}{y} = \lambda y^{-(\lambda+1)}$$

Si $y < 1$, se tiene $ln(y) < 0$ y luego $\mathbb{P}(X \leq ln(y)) = 0$, pues $X \sim$ **Exponencial**$(\lambda)$
Luego

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda y^{-(\lambda+1)} & y \geq 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$$