PAUTA PREGUNTA 3 C3 2007

i) Sea $b > 0$. Luego, por el hint, tenemos que $X \geq a \Longleftrightarrow (X+b)^2 \geq (a+b)^2$. Luego, $P(X \geq a) = P((X+b)^2 \geq (a+b)^2)$ (pues es el mismo evento). Pero la variable aleatoria $(X+b)^2$ es siempre no negativa, luego podemos aplicar la desigualdad de Markov, que asegura que $P((X+b)^2 \geq (a+b)^2) \leq \frac{E((X+b)^2)}{(a+b)^2} = \frac{E(X^2)+2bE(X)+b^2}{(a+b)^2} = \frac{\sigma^2+b^2}{(a+b)^2}$.

ii) Tomando $b = \frac{\sigma^2}{a}$ (es fácil llegar a que este es el valor de b adecuado si igualamos $\frac{\sigma^2+b^2}{a^2+b^2} = \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$ y despejamos el valor de b*)*, tendremos que $P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2+(\frac{\sigma^2}{a})^2}{[a+(\frac{\sigma^2}{a})]^2} = \frac{(a^2\sigma^2+\sigma^4)/a^2}{(a^2+\sigma^2)^2/a^2} = \frac{\sigma^2(a^2+\sigma^2)}{(a^2+\sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{(a^2+\sigma^2)}$