Guía N°3 MA34-A 2008-01

Profesor: Servet Martínez

Profesor Auxiliar: Andrés Fielbaum

P1

i) Sea X v.a. con distribución tipo Bernouilli(p). Calcule su función generadora de momentos ϕ_X, su transformada de Laplacae ψ_X o su función característica φ_X (sólo una de las tres).

ii) Demuestre, utilizando la transformada que haya elegido en el punto *i)*, que la suma de n v.a. independientes todas con distribución tipo Bernouilli(p), es una v.a. con distribución Binomial(n,p).

P2

Sea X v.a. absolutamente continua con función de densidad $f_X(x) = x^2 \cdot 1_{(0,a)}(x)$. Calcule el valor de a, y determine $\mathbb{E}(X), Var(X)$.

P3

Sea X a valores en $\mathbb{N}* = \{1, 2, 3, ...\}$, tal que $\mathbb{P}(X = k) = 2^{-k} \forall k$.

i) Pruebe que esa distribución de probabilidad corresponde a una distribución de probabilidad

ii) Calcule $\mathbb{E}(X), Var(X)$. *Hint: Recuerde que la derivada de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ es $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1}$

iii) Defina $Y = 2^X$. Muestre que $\mathbb{E}(Y) = +\infty$.

P4

Sea X una v.a. aleatoria absolutamente continua con distribución tipo exponencial de dos parámetros (a, λ), i.e., cuya función de densidad corresponde a $f_X(x) = \lambda e^{\lambda(a-x)} 1_{(a,+\infty)}(x)$.

i) Calcule $\mathbb{E}(X), Var(X)$

ii) Calcule la transformada de Laplace $\psi_X(t)$.

iii) Vuelva a calcular, usando lo calculado en *ii)*, $\mathbb{E}(X)$ y *Var(X).*

P5

Sea X v.a. aleatoria absolutamente continua con función de densidad dada por $f_X(x) = \frac{\alpha}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$.

i) Calule el valor de α

ii) Muestre que X no tiene esperanza definida en los reales.

P6

A n personas se les devuelven sus sombreros (todos distintos), en forma aleatoria. Defina $X_i = 1$ si a la persona i se le devolvió su sombrero, y *0* si no.

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (i.e., la cantidad total de personas que recibió su sombrero). Muestre que:
i) $\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{n}\ \forall i$
ii) $\mathbb{E}(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)} \forall i \neq j$
iii) $\mathbb{E}(S_n^2) = 2$
iv) $Var(S_n) = 1$

P7

Sea X v.a. absolutamente continua. Muestre que $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$, donde F_X es la función de distribución.

P8

Muestre, usando función generadora de momentos, que la suma de m v.a. independientes, donde X_k se distribuye como una $Binomial(n_k, p)$, sigue una distribución tipo $Binomial(\sum_{k=1}^{m} n_k, p)$. *Hint: Demuestre para m=2 y luego generalice por inducción.*

P9

Sea X v.a. con distribución tipo $Pareto(k, \theta)$, i.e., cuya función de distribución está dada por $F_X(x) = [1 - (\frac{\theta}{x})^k] 1_{[\theta, \infty)}(x)$. Encuentre los valores de k para los cuales la esperanza y la varianza de X son finitas, y cálculelas.

P10

Sea X v.a. a valores en $\{a_1, ...a_n\}$. Se quiere estimar el valor de X minimizando el *error cuadrático medio*, i.e., se quiere encontrar la cantidad que resuelva $min_{z \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((X - z)^2)$. Muestre que $z = \mathbb{E}(X)$ es solución del problema. Muestre, mediante un contraejemplo, que $z = \mathbb{E}(X)$ NO es solución del problema $min_{z \in \mathbb{R})} \mathbb{E}(|X - z|)$.

P11

Sean X, Y v.a. independientes, absolutamente continuas, con densidades $f_X(x) = \frac{1_{[-1,1]}(x)}{\pi(1-x^2)^{1/2}}$ y $f_Y(y) = y e^{-y^2/2} 1_{\mathbb{R}^+}(y)$ respectivamente.
i) Calcule $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(XY), Var(X), Var(Y)$
ii) Defina Z=X+Y, encuentre su densidad y determine su esperanza y varianza.

P12

Sean X, Y v.a. independientes, ambas distribuidas según una $exp(\lambda)$. Encuentre la distribución de *Z=X+Y.*

P13

Pruebe, usando convolución, que si X, Y son v.a. independientes absolutamente continuas tales que $f_X(x) = 0 \forall x \in A^c, f_Y(y) = 0 \forall y \in B^c$, entonces

$f_{X+Y}(z) = 0 \forall z \in (A+B)^c$, donde $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

P14

i) Sean X, Y v.a. independientes con distribución tipo $U([0,1])$. Encuentre la distribución de $W = X + Y$.

ii) Sea ahora además Z otra v.a., independiente de X e Y, y también con distribución tipo *U([0,1])*. Calcule la función de densidad de $Z+X+Y$.

P15

Sean X, Y v.a. independientes, ambas con distribución tipo $U([-1,1])$. Defina $R^2 = X^2 + Y^2$. Encuentre la densidad de R^2 y de R (la raíz positiva de R^2).