

Pauta P3 C2

Como siempre, calcularemos la función de distribución de Y, F_Y . Para ello, notamos primero que dado que F_X está acotada entre $(0,1)$, entonces Y se concentrará en $(0,1)$, i.e., $F_Y(y) = 0 \forall y \leq 0, F_Y(y) = 1 \forall y \geq 1$. Para $y \in (0,1)$, calculemos:

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq y)$. Pero dado que F_X^{-1} es estrictamente creciente, luego en general $z \leq w$ ssi $F_X^{-1}(z) \leq F_X^{-1}(w)$. Luego aplicamos F_X^{-1} en lo que teníamos y entonces $\mathbb{P}(F_X(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1})(y)$ (por definición de F_X) $= y$. Así, tenemos que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & 1 < y \end{cases}$$

Que corresponde justamente a la distribución de una uniforme en $(0,1)$.