

Guía N°2 MA-34A

Profesor: Servet Martínez

Profesor Auxiliar: Andrés Fielbaum

P1

Sea X variable aleatoria tal que su función de distribución F_X es continua. Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera. Pruebe que $P(X = x) = 0$. *Hint: Recuerde la continuidad de una medida de probabilidad.*

P2

Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$, variables aleatorias independientes. Calcule $P(X < Y)$. Interprete los casos $\lambda = \mu$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$.

P3

Considere $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ el grupo donde el conjunto $\mathbb{Z}_n = 0, 1, \dots, n-1$ está dotado de la operación $+_n$ que es la suma módulo n . Sea X una v.a. discreta a valores en $\mathbb{Z}_n$, tq $P(X = k) = \frac{1}{n} \forall k \in \mathbb{Z}_n$. Sea Y una v.a. a valores en $\mathbb{Z}_n$ independiente de X . Muestre que la v.a. $X +_n Y$ tiene la misma ley de distribución que X .

P4

Un proceso de Poisson en el plano de parámetro λ , es un proceso que “lanza” puntos a $\mathbb{R}^2$, de manera tal que la cantidad de puntos que hay en una región de área A es una variable aleatoria de Poisson de parámetro λA , y tal que la cantidad de puntos que haya en regiones disjuntas son eventos independientes. Sea X la variable aleatoria que a cada punto de $\mathbb{R}^2$, le asigna la distancia al punto del proceso más cercano (considerando norma euclídeana). Calcule las funciones de distribución y de densidad de X .

P5

Sea Y una variable aleatoria a valores en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, con densidad discreta de probabilidad:

$$P(Y = k) = \frac{\alpha}{(e-1)k!}$$

Sean $\{U_n\}_{n \geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias independientes entre sí y todas independientes de Y , tq $U_n \sim \text{uniforme}([0, 1])$ para todo n . Defina $W = \max\{U_1, \dots, U_Y\}$. Demuestre que $\alpha = 1$ y demuestre también que la función de densidad de probabilidad de W está dada por:

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e-1} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

P6

Sea X una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0, 1]$. Defina $Y = \tan(\pi X)$. Demuestre que la función de densidad de probabilidad de Y está dada por $f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$

P7

Sea $X \sim \exp(\lambda)$, y defina $W = e^X$. Encuentre la función de densidad de probabilidad f_W de W .

P8

Sea $X \sim \exp(1)$, y defina Y de la siguiente manera:

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq 1 \\ \frac{1}{X} & \sim \end{cases}$$

Calcule la función de densidad de probabilidad de Y .

P9

Sea X una v.a. continua no negativa con densidad f_X , y L una variable aleatoria discreta independiente de X tal que $P(L = 1) = P(L = -1) = \frac{1}{2}$. Defina $Z = LX$. Demuestre que la función de densidad de Z está dada por $f_Z(x) = \frac{1}{2}f_X(|x|)$.

P10

Se dispara un proyectil con velocidad V , con V v.a. continua con distribución exponencial (p), y con un ángulo de lanzamiento θ v.a. que se distribuye uniformemente entre 0 y $\pi/2$, independiente de V . Sea D el alcance del proyectil. Encuentre la función de densidad de probabilidad de D .

P11

Sean A, B variables aleatorias con distribución exponencial de parámetro λ e independientes. Calcule la probabilidad de que la ecuación $Ax^2 + Bx + (A - B) = 0$ tenga raíces reales.

P12

Sean X, Y variables aleatorias independientes, con $X \sim \exp(s)$, $Y \sim \exp(t)$. Defina $Z = \min\{X, Y\}$. Encuentre la función de densidad de probabilidad de Z . Repita el mismo cálculo, pero ahora suponiendo que $X \sim \text{Uniforme}([0, 1])$, $Y \sim \text{Uniforme}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$.

P13

Sea $X \sim \text{Uniforme}([0, 1])$, $Y \sim \text{Uniforme}([0, X])$. Calcule $P(Y > \frac{1}{2})$.

P14

Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias exponenciales de parámetros (t_i) , para todo $i=1, \dots, n$. Defina $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Demuestre que $Z \sim \exp(\sum_{k=1}^n t_k)$.

P15

Suponga que usted dispone de q pesos, y juega n veces a un juego, cada una de ellas en forma independiente, donde la probabilidad de ganar en cada una de ellas es p . Cada vez que usted gana, su dinero se duplica, y cada vez que pierde, se reduce a la mitad. Encuentre la distribución de su cantidad final de dinero.

P16

Sea $X \sim \exp(s)$, $Y \sim \exp(t)$. Calcule $P(X < Y)$. Hint: Defina $Z = X + (-Y)$ y note que se le pide $P(Z < 0)$; recuerde además la convolución de dos variables aleatorias.

P17

Sea (X, Y) un vector aleatorio que toma valores en la semi-bola unitaria, es decir, en el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ en forma uniforme (i.e. la probabilidad de que el vector caiga en un conjunto es proporcional a su área). Así, tenemos que $f_{XY}(x, y) = \alpha 1_S$, donde 1_S es la función indicatriz de S , que vale 1 en S y 0 fuera de S .

- i) Encuentre el valor de α
- ii) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

P18

Sea X variable aleatoria con densidad $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

- a) Bosqueje la función de distribución de X
- b) Encuentre la probabilidad de los siguientes eventos:
 - i) $\{|X| < 2\}$
 - ii) $\{X > 2 \text{ ó } X < 0\}$
 - iii) $\{1 < X < 4\}$
 - iv) $\{|X| + |X-2| < 4\}$
 - v) $\{X \text{ es irracional}\}$

P19 (Binomial Negativa)

Una moneda cargada se lanza hasta que salga cara por k -ésima vez. Suponga que cada lanzamiento es independiente, y que en cada lanzamiento, la probabilidad de obtener cara es $1 > p > 0$. Defina la variable aleatoria X que indica en

que lanzamiento se obtuvo la k -ésima cara.

i) Encuentre la función de densidad de probabilidad discreta de X (note que para $k=1$, corresponde a una geométrica(p)).

ii) Verifique que, con probabilidad 1, en algún lanzamiento se obtendrá cara por k -ésima vez.

iii) Pruebe que $X = \sum_{i=1}^k Y_i$, donde cada Y_i sigue una distribución geométrica(p), y son todas independientes entre sí.

P20 (desafío)

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ espacio de probabilidad, y sean $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}$. Recuerde que decíamos que eran eventos independientes si para todo $k = 2, \dots, n, \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, se tiene que $P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \dots P(E_{i_k})$. Pruebe que la siguiente definición de independencia es equivalente con la vista en clase: $\forall k = 2, \dots, n \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \forall t_1, \dots, t_k \in \{0, 1\}, P(E_{i_1}^{t_1} \cap \dots \cap E_{i_k}^{t_k}) = P(E_{i_1}^{t_1}) \cdot \dots \cdot P(E_{i_k}^{t_k})$, donde para todo $j, E_j^0 = E_j, E_j^1 = E_j^c$.

P21 (desafío)

Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias, tal que $\forall n, X_n$ se distribuye como una $Binomial(n, p_n)$, donde $\forall n, n \cdot p_n = \lambda$ (constante). Pruebe que las X_n tienden a una $Poisson(\lambda)$, en el siguiente sentido. Si Y v.a. se distribuye como una $Poisson(\lambda)$, entonces $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(X_n)=k}{P(Y)=k} = 1$.

P22

Sea X v.a. distribuída uniformemente en $[a, b]$, Y distribuída uniformemente en $[c, d]$. Calcule la función de densidad de probabilidad de $W = X + Y$.

P23

Sea X variable aleatoria absolutamente continua, con función de densidad f_X . Defina $Y = e^{(X^2)}$. Encuentre la función de densidad de Y .

P24

Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. (independientes idénticamente distribuidas). Defina $W = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $V = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Encuentre las funciones de distribución de W y V .

P25

Se divide el plano en rectas verticales, cada una separada por una distancia L de la siguiente. Se lanza en forma aleatoria una varilla de largo D en el plano. Calcule la probabilidad de que la varilla corte a al menos una recta. Interprete el caso $D \rightarrow \infty$. *Hint: Condicione con respecto al ángulo formado por la varilla con la horizontal.*