Algunos Problemas Resueltos

P1

Suponga que la cantidad X de clientes que llegan a una cierta tienda entre las 8 am y las 9 am es una variable aleatoria con distribución tipo Poisson(λ). Suponga que cada cliente que llega tiene probabilidad p de ser hombre, y para cada persona este es un hecho independiente. Denote por Z la cantidad de hombres que llegan a la tienda en ese rango horario. Pruebe que Z sigue una distribución de tipo Poisson(λp). *Hint: Condicione con respecto al valor tomado por X.*

Sol

Haciendo caso al hint, resolvemos por probabilidades totales. Sea entonces $k \in \mathbb{N}$ (es evidente que tanto Z como X toman valores en los naturales), luego $P(Z=k)= \sum_{n=0}^{\infty} P(Z=k|X=n)P(X=n)$.

Lo primero que notamos entonces es que siempre $Z \leq X$, luego si $k > n$, $P(Z=k|X=n)=0$. Después notamos que si $X=n \geq k$, entonces estamos frente a un experimento en el cual hay n personas, y queremos calcular la probabilidad de que k de ellos sean hombres, si cada uno tiene probabilidad p de serlo. Esto corresponde a una Binomial(n,p) (recuerden que una binomial(n,p)siempre corresponde a repetir n veces independientes un mismo experimento, cada uno con probabilidad de éxito p, y calcular la probabilidad de que k de esas n hayan sido exitosas. Si no lo creen, resuelvan $P(Z=k|X=n)$! siempre será un buen ejercicio). Así, $P(Z=k|X=n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ $\forall n \geq k$.

Juntando lo que tenemos, y utilizando la distribución de X, nos damos cuenta que:

$P(Z=k) = \sum_{n=k}^{\infty}[\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}1/n!\lambda^n] = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$

Con esto, concluimos el resultado pedido.

P2

Sea X variable aleatoria distribuida uniformemente en $[0,2\pi]$. Sea $Y = sin(X)$. Encuentre la función de densidad de probabilidad de Y.

Sol

Calcularemos primero la función de distribución de Y. Recordemos que $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(w \in \Omega : Y(w) \leq y)$, donde la primera igualdad es por definición y la segunda es simplemente una aclaración de la notación utilizada (que es la que regularmente se usa en este contexto). Así, notamos que por estar sin acotado entre -1 y 1, $F_Y(y) = 0 \forall y < -1, F_y(y) = 1 \forall y > 1$. Para $y \in [-1,1]$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(sin(X) \leq y)$. Si definimos entonces la funcion $arcsin$ como la inversa de sin restringida a $[\pi/2, 3\pi/2]$. Luego, si $y \geq 0$, $sin(X) \leq y$ssi $X \in [0, \pi - arcsin(y)] \cup [arcsin(y), 2\pi]$ donde esta es una unión disjunta (para encontrar este conjunto, lo más recomendable es hacer un gráfico de la función sin). Luego, si $y \geq 0$, $F_Y(y) = P(X \in [0, \pi - arcsin(y)] \cup [arcsin(y), 2\pi]) = \frac{1}{2\pi}(2\pi -$

$arcsin(y) + \pi - arcsin(y) - 0) = \frac{1}{2\pi}(3\pi - 2arcsin(y))$. Para calcular esta probabilidad, simplemente se utilizó el hecho de que X se distribuye uniformemente en $[0, 2\pi]$. Por último, si $y \leq 0$, $sin(X) \leq yssiX \in [arcsin(y), 3\pi - arcsin(y)]$. Luego, $F_Y(y) = P(X \in [arcsin(y), 3\pi - arcsin(y)]) = \frac{1}{2\pi}(3\pi - 2arcsin(y))$ (¡igual que antes!).

Así, juntando todo, tendremos que $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \frac{1}{2\pi}(3\pi - 2arcsin(y)) & -1 < y < 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$.

Notemos que la función resulta creciente, continua (en particular continua a la derecha) y que va de 0 a 1, luego cumple los requisitos que debiera cumplir. Así, para calcular $f_Y(y)$, basta derivar F_Y y con ellos la encontraremos.

P3

Sean X, Ydos variables aleatorias independientes, cada una siguiendo una distribución de tipo exponencial de parámetros λ y μ, respectivamente. Calcule $P(X < Y)$. Interprete el caso $\lambda = \mu$.

Sol

Usaremos una generalizació de la fórmula de probabilidades totales para el caso continuo. Esta dice (como la intuición sugiere), que si W es una v.a. absolutamente continua con función de distribución f_W, entonces para cualquier otra variable aleatoria T, y para cualquier conjunto A en los borelianos, tendremos que $P(T \in A) = \int_{\mathbb{R}} P(T \in A | W = x) f_W(x) dx$. En esta definición hay que tener ojo, pues por ser W continua, $P(W = x) = 0$, por lo que nuestra definición de probabilidades condicionales no sirve, sin embargo esto quedará bien formalizado cuando veamos densidades condicionales. Por mientras, de todos modos la fórmula se puede usar, entendiendo que significa condicionar.

Así, en este caso, tendremos que:

$P(X < Y) = \int_0^\infty P(X < Y | Y = x) f_Y(x) dx = \int_0^\infty P(X < x) f_Y(x) dx$. En esta última igualdad utilizamos que Y es una v.a. positiva (para cambiar el límite inferior de integración), y que X, Y son independientes para reemplazar $P(X < Y | Y = x)$ por $P(X < x)$. Pero como son exponenciales, lo que estamos integrando ahora es conocido. Así, $P(X < x) = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Por otro lado, f_Y(x)=$\mu e^{-\mu x}$. Luego, $P(X < Y) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})(\mu e^{-\mu x}) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$ (queda propuesto desarrollar la integral).

El caso $\mu = \lambda$ resulta de probabilidad $1/2$, lo que es intuitivo dado que ambas v.a. tienen la misma distribución, luego deben tener ambas igual probabilidad de ser la mayor (notando que la probabilidad de que sean iguales es 0, por ser v.a. continuas).