Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamente de Ingeniería Matemática
1 de Octubre de 2007

Control N°2 MA34-A, Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor: Servet Martínez   Profesores Auxiliares: Andrés Fielbaum, Tomas Spencer

- 1. Sea X una variable aleatoria a valores discretos, con densidad de probabilidad discreta dada por

$$p_X(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \eta \left(\frac{1}{3}\right)^k, k \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}.$$

a) Calcule el valor de η.

b) Considere ahora Z una variable aleatoria independiente de X, con $Z \sim$Binomial(n, q), $q \in (0, 1)$. Calcule la función de densidad de probabilidad discreta de $W = min\{X, Z\}$, es decir calcule $p_W(k) = \mathbb{P}\{W = k\}$.

- 2. Sean X, Y dos variable aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Demuestre que la distribución de $X - Y$ no depende de θ.

- 3. Sea una variable aleatoria X con densidad $f_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}$ para $u > 0$ y $f_X(u) = 0$ si $u \leq 0$.

a) Defina la variable aleatoria $Y = \sqrt{X}$ es decir $Y(\omega) = \sqrt{X(\omega)}$, donde $\sqrt{\cdot}$ es la raíz positiva. Encuentre la función densidad f_Y de la variable Y.

b) Sea L una variable aleatoria independiente de Y y tal que $\mathbb{P}(L = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(L = -1)$. Pruebe que la variable aleatoria $Z = LX$ es una Normal$(0, 1)$.

- 4. Sean $p \in (0, 1)$ y $q \in (0, 1)$. Considere $(X_n : n \geq 1)$ e $(Y_n : n \geq 1)$ dos sucesiones independientes de variable aleatorias independientes entre sí (es decir $(X_n, Y_n : n \geq 1)$ son todas variables independientes), y tal que $X_n \sim$ Bernoulli(p), $Y_n \sim$ Bernoulli(q). Defina $Z_i = 1 \Leftrightarrow (X_i = Y_i)$, $Z_i = 0 \Leftrightarrow (X_i \neq Y_i)$, para $i \geq 1$.

a) Pruebe que la variable aleatoria $Y := \inf\{i \geq 1 : Z_i = 1\}$ es Geométrica(θ), y encuentre el valor del parametro θ.

b) Sea $n \geq 1$, pruebe que $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ es Binomial(n,θ).

Indicación:

Decimos que X variable aleatoria discreta se distribuye como una Binomial (n,p)ssi $\mathbb{P}\{X=k\} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k(1-p)^{n-k}$ (para $k \in \mathbb{N}$). Decimos que tiene una distribución Geométrica (p) ssi $\mathbb{P}\{X=k\} = (1-p)^{k-1}p$ (para $k \in \mathbb{N}$).

Decimos que Y variable aleatoria continua se distribuye como una Uniforme (a,b) ssi su función de densidad de probabilidad es $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & \sim \end{cases}$.
Decimos que se distribuye como una Normal(μ, σ^2) ssi su función de densidad de probabilidad es $f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Tiempo: 3 Horas