PAUTA PREGUNTA 2 CONTROL 2

Responderemos usando convolución. Sabemos que $f_{X-Y}(t) = f_{X+(-Y)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z) \cdot f_{-Y}(t-z)dz$. Además,

$$F_{-Y}(y) = P(-Y < y) = P(Y > -y) = 1 - F_Y(-y) \Rightarrow f_{-Y}(y) = f_Y(-y)$$

Es decir, $-Y$ es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre $[-\theta - \frac{1}{2}, -\theta + \frac{1}{2}]$.

Notar entonces que el máximo valor de f_{X-Y} será cuando f_X y f_{-Y} estén en su máximo, es decir, en $\theta + \frac{1}{2} + -\theta + \frac{1}{2} = 1$, luego $f_{X-Y}(t) = 0 \, \forall t > 1$. Similarmente, se obtiene $f_{X-Y}(t) = 0 \, \forall t < -1$.

Luego, dada la distribución de X, tenemos que $f_{X-Y}(t) = f_{X+(-Y)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z) \cdot f_{-Y}(t-z)dz = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} f_X(z) f_{-Y}(t-z)dz = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} f_{-Y}(t-z)dz$. Si hacemos $y = -z \Rightarrow -dy = dz$, resulta $= \int_{-\theta-\frac{1}{2}}^{-\theta+\frac{1}{2}} f_{-Y}(t+y)dy$ (notar que el signo $-$ se fue por la inversión en los límites de integración). Así, para que $f_{-Y}(t+y)$ sea distinto de cero, necesitamos que caiga en el intervalo, es decir, que se cumpla:

$t+y \geq -\theta - \frac{1}{2} \Rightarrow y \geq -t - \theta - \frac{1}{2}$, y además $t+y \leq -\theta + \frac{1}{2} \Rightarrow y \leq -t - \theta + \frac{1}{2}$. La pregunta entonces es qué ponemos en los límites de integración, los límites originales o las nuevas cotas encontradas para y. Como necesitamos que se cumplan ambas cotas (recordar que la primera fue necesaria para que f_X valiera cero), escogemos la intersección entre los dos intervalos. Veamos que pasa si suponemos que el límite inferior de integración sera la cota recién encontrada, es decir, si suponemos $-t - \theta - \frac{1}{2} > -\theta - \frac{1}{2} \Rightarrow t < 0$. Así, al buscar el límite superior de integración, resulta que $-t - \theta + \frac{1}{2} > -\theta + \frac{1}{2}$. Como necesitamos mantener ambas cotas, elegimos la mínima, es decir, $-\theta + \frac{1}{2}$. Así, para $-1 < t < 0$, tenemos que $f_{X-Y}(t) = \int_{-t-\theta-\frac{1}{2}}^{-\theta+\frac{1}{2}} dy = 1 + t = 1 - |t|$.

Si suponemos que el límite inferior de integración será $-\theta - \frac{1}{2}$, resulta que $\theta \geq 0$, y entonces $-t - \theta + \frac{1}{2} \leq -\theta + \frac{1}{2}$. Nuevamente, como debemos respetar ambas cotas, resulta que para $0 \leq t < 1$, $f_{X-Y}(t) = \int_{-\theta-\frac{1}{2}}^{-t-\theta+\frac{1}{2}} dy = 1 - t = 1 - |t|$.

Así, juntando todo, tenemos que

$$f_{X-Y}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si \ -1 < t < 1 \\ 0 & si \ no \end{cases}$$

Que claramente no depende de θ.