PAUTA PREGUNTA 1 CONTROL 2

a) **(2 pts)** Sabemos que siempre la probabilidad de todo el espacio ($\mathbb{N}$ en este caso) debe ser 1. Así, debe cumplirse que $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \eta \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$

b) **(4 pts)** Queremos calcular $P(W=k)$ para $k \in \mathbb{N}$. Notemos primero que si $k > n$, $P(W=k) = 0$, pues $Z \leq n$ siempre, y por ende $W = min\{X, Z\}$ también. Si $k \leq n$, procedemos por probabilidades totales: $P(W=k) = P(W=k|X<k) \cdot P(X<k) + P(W=k|X=k) \cdot P(X=k) + P(W=k|X>k) \cdot P(X>k)$.

El primer factor del producto es cero, pues $X < k \Rightarrow min\{X, Z\} < k \Rightarrow P(W=k|X<k) = 0$.

En el segundo factor, debemos notar que $P(W=k|X=k) = P(Z \geq k)$ (pues así el mínimo será alcanzado por X que es igual a k), y que $P(Z \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) p^i (1-p)^{n-i}$. Además, sabemos que $P(X=k) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

En el tercer factor, debemos notar que al condicionar con $X > k$, la única posibilidad de que el mínimo sea k, es que lo alcance Z, i.e., $P(W=k|X>k) = P(Z=k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k (1-p)^{n-k}$. Por último, sabemos que $P(X>k) = \frac{2}{3} \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$.

Así, recapitulando todo, resulta que $P(W=k) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \sum_{i=k}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) p^i (1-p)^{n-i} + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{2}{3} \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$.