Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Guía N°1 Probabilidades

Profesor: Servet Martínez. Profesos Auxiliar: Andrés Fielbaum

P1

En el juego del Crabs, el jugador dispone de dos dados. Si en la primera tirada el jugador saca 7 u 11, gana. Si saca 2, 3 ó 12 pierde. En otro caso, sigue jugando hasta sacar un 7, caso en el que pierde, ó el número inicial, caso en el que gana. Calcule la probabilidad de ganar.

P2

En un control de alternativas, Pablo tiene probabilidad **p** de saber una respuesta. Cada pregunta consta de **m** alternativas. Si sabe la respuesta a la pregunta, responde en forma correcta con probabilidad 1. Si no la sabe, responde en forma aleatoria y equiprobable cualquier alternativa. Calcule la probabilidad de que supiera una respuesta si contestó bien.

P3

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$un espacio de probabilidad. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$, tal que $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n \in \mathbb{N}$ y suponga que $\mathbb{P}(\mathrm{A_{n+1}}|\mathrm{A_n}) \leq \frac{1}{2}\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Demuestre que $lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\mathrm{A_n}) = 0$

P4

Sean $\{n_1, ..., n_m\}$ números naturales mayores que cero, conocidos por m personas que juegan al siguiente juego: Se elige un número al azar entre 1 y n_1 (inclusive), y el primer jugador intenta adivinar. Si lo logra, gana el juego, y si no, se elige un número al azar entre 1 y n_2, tras lo cual el segundo jugador intenta adivinar, y así sucesivamente. El juego termina cuando alguien gana o cuando ya no hay más jugadores. Calcule la relación que debe haber entre los $n_i$para que el juego sea justo, es decir, para que todos los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar. Debe llegar a una relación bien concisa.

P5

Considere un espacio con medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Sean A, B dos eventos con probabilidad no nula. Se dice que B repele a A si $\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})<\mathbb{P}(\mathrm{A})$, y que B atrae a A si no se cumple que B repele a A. Demuestre que si B atrae a A, entonces A atrae a B y B repele a A^c. De ejemplos de casos concretos de eventos que se repelan y que se atraigan.

P6

Sea S=$\{1, ..., n\}$. Sea $\Omega = P(S) \times P(S)$, donde P denota al conjunto de las partes. Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$, donde la probabilidad de cada conjunto es la equiprobable. Pruebe que $\mathbb{P}\{(C, D) \in \Omega : C \subseteq D\} = (\frac{3}{4})^n$. Hint: Condicione con respecto a la cardinalidad del conjunto D.

P7

Melón y Melame juegan lanzando una moneda cargada, con probabilidad **p** de salir cara. Si Melame comienza jugando, calcule la probabilidad de que Melame gane (gana quien saca la primera cara).

P8

En un curso de 20 niños, se va a formar una directiva, compuesta por 5 secretarios. Si el Pato Willie es un alumno de este curso, y la directiva se elige al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que Pato Willie no esté en la directiva?. Calcule ahora la probabilidad de que Pato Willie sea presidente, si la lista está compuesta por un presidente, un vicepresidente, un secretario, un tesorero y un guardián.

P9 (desafío)

Se define para $\{a_n\}$sucesión real, $limsup_n a_n = lim_{n\to\infty}(sup_{m>n}\{a_m\})$. Sea $E_n$una colección de eventos (asuma que estamos en un espacio de probabilidad). Demuestre que $\mathbb{P}\{limsup_n(E_n)\} \geq limsup(\mathbb{P}\{E_n\})$

P10

En una fábrica hay tres máquinas, A, B y C, las que producen el 45%, 30% y 25% de la producción total de la fábrica, respectivamente. Los porcentajes de artículos defectusos producidos por cada máquina son 3%, 4% y 5% respectivamente. Calcule:

a) Si seleccionamos un artículo al azar, la probabilidad de que sea defectuoso

b) Si tomamos al azar un artículo y resulta que es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por B?

c) Si tomamos al azar un artículo y resulta que no es defectuoso, ¿Qué máquina tiene mayor probabilidad de haberlo producido?

P11

En una urna, tenemos 3 bolitas rojas y 2 negras. Se saca una bolita al azar y, sin mirarla, se guarda en el bolsillo. Se saca luego otra bolita, y resulta que es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bolita también haya sido roja?

P12

Magallanes United y Buin Lakers son los dos equipos finalistas de la NBA, y jugarán una cantidad impar de partidos para dirimir al campeón (obviamente, quien gane más partidos será el campeón). Supongo que Magallanes United tiene probabilidad **p** de ganar cada partido, y que cada partido es independiente de los demás. Calcule los valores de **p** para los que a Magallanes United le conviene más jugar (2K+1) partidos en vez (2K-1).

P13

Actualmente, los números celulares en Chile se componen de 8 cifras. La primera puede ser 7, 8 ó 9, y las restantes pueden ser cualquier dígito. Calcule la probabilidad de que si a usted le entregan un número al azar, este contenga exactamente tres 8.

P14

Se elige un número al azar entre 0 y 10, al que llamaremos **i**. Posteriormente, se tiran dos dados de **i** caras en forma independiente. Calcule la probabilidad de que **i**=10, dado que la suma entre los dados dio 10.

P15

En una caja hay **2n** helados, **n** de chocolate y **n** de lúcuma. Se repartirán entre **2n** personas, dentro de las cuales hay **a** que prefieren chocolate, **b** que prefieren lúcuma y al resto le da lo mismo cualquiera de los dos. Calcule la probabilidad de que todos queden satisfechos, si se reparten al azar.

P16

i) Demuestre que la intersección arbitraria de álgebras es álgebra, es decir: Sea Ω un conjunto distinto de vacío, y $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una clase no vacía de subconjuntos de Ω. Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\epsilon I}$ un conjunto de tamaño arbitrario, donde $\forall i \in I$,$\mathcal{A}_i$ es un álgebra en Ω. Pruebe que $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ tambiés un álgebra en Ω. Note que entonces tiene sentido definir $\mathcal{A}(\Gamma) = \bigcap_{B\ algebra,\ \Gamma\subseteq B} B$, el álgebra engendrada por Γ, que vendría siendo la menor álgebra que contiene a Γ.

ii) Un subconjunto no vacío $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, se dice que es una semiálgebra ssi cumple las siguientes propiedades:

★$\Omega \in \mathcal{S}$

★A,B$\in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

★A$\in \mathcal{S} \Rightarrow A^C = U_{i=1}^n A_i$, con $A_i \in \mathcal{S} \forall i$, y todos disjuntos de a pares.

Por ejemplo, la clase $\{(a,b] : a < b\ a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$es un álgebra en $\mathbb{R}$ (¡pruébelo!). Demuestre que $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \{B \subseteq \Omega,\ tq\, B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ con\, B_i \in \mathcal{S} \forall i\}$

P17 (desafío)

Sea Ω un conjunto no vacío, $\xi \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Pruebe que $\sigma(\xi) = \bigcup_{\tau \subseteq \xi,\, \tau\, numerable} \sigma(\tau)$

P18

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $c \in \mathbb{R}$,$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ todos disjuntos de a pares y $B \in \mathcal{B}$ tal que $\forall n, \mathbb{P}(B|A_n) \geq c$. Muestre que $\mathbb{P}(B|\bigcup_n A_n) \geq c$.

P19

i) Muestre mediante un ejemplo que la unión de σ-álgebras no es siempre σ-álgebra.
ii) Encuentre un conjunto Ω tal que admita una y sólo una σ-álgebra.

P20

Considere n bolitas numeradas del 1 al n, y m urnas numeradas del 1 al m. Calcule de cuantas formas se pueden distribuir las bolas en las urnas de modo que:
i) Quede exactamente una bola por urna (asuma n=m)
ii) Para todo i=1,...,n , la i-ésima bola **no** quede en la i-ésima urna (asuma $n \leq m$).
iii) Quede a lo más una bola por urna, y si una urna a está numerada menor que otra urna b, y ambas tienen bola, entonces la bola que está en a está numerada menor que la bola que está en b.
iv) Al menos una urna quede vacía (considere sólo el caso m=*3*).

P21

Jugando póker, se le reparten en forma aleatoria 5 cartas de un mazo de naipe inglés (sin jokers). Calcule la probabilidad de obtener:
i) Un par (exactamente un par y nada más)
ii) Un trío
iii) Dos pares
iv) Full (i.e., un trío y un par)
v) Escala (5 números consecutivos, sin importar la pinta)
vi) Póker (cuatro cartas del mismo número)
vii) Escala real (lo mismo que la escala, pero todas las cartas de la misma pinta)
viii) Color (todas las cartas de la misma pinta)
ix) Pichanga (ninguna de las anteriores)

x) Pichanga al as (lo mismo que la pichanga, pero una de las cinco cartas debe ser un as)

P22

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$espacio de probabilidad, y sean $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}$. Pruebe por inducción que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_j)$$

P23

Sea $(\Omega, \mathcal{B})$ espacio medible (i.e., $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra sobre Ω), y $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0, 1]$ tal que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,$\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y para todo A,$B \in \mathcal{B}$ y disjuntos, se tiene que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Pruebe que si además se cumple que para toda secuencia decreciente $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$, tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, se tiene que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$, entonces $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

P24

Considere la palabra ABRACADABRA. Si se desordena en forma aleatoria, ¿Cuál es la probabilidad de formar nuevamente la palabra ABRACADABRA?. ¿Cuántas palabras se pueden formar, si se dejan fijas las primeras cuatro letras?.