

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliares: Constanza Maturana - Tomás González
Fecha: 18 de junio

Auxiliar: Integración

Resumen Materia

1. Integración Impropia Tipo 1: Se desea calcular

$$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{x^p} dx$$

Para ello se procede de la siguiente manera:

- a) Determinar el polinomio de Taylor de $g(x)$ en torno a $x_0 = 0$ de orden n : $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$
- b) $I = \int_0^1 \frac{g(x)-p_n(x)}{x^p} dx + \int_0^1 \frac{p_n(x)}{x^p} dx$
- c) $\int_0^1 \frac{p_n(x)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^p} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^{k-p} dx = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!(k-p+1)}$
- d) $\int_0^1 \frac{g(x)-p_n(x)}{x^p} dx = \int_0^1 G(x) dx$ donde: $G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-p_n(x)}{x^p} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- e) Se calcula $\int_0^1 G(x) dx$ mediante el M. de Simpson Compuesto

2. Integración Impropia Tipo 2: Se desea calcular $I_\infty = \int_0^\infty f(x) dx$.

- a) Se separa en $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx$.
- b) Con un cambio de variables $x = \frac{1}{u}$ se transforma la integral: $\int_1^\infty f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(\frac{1}{u})}{u^2} du$
- c) Ahora $I_\infty = \int_0^1 \left(f(x) + \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2} \right) dx$ se calcula con alguno de los métodos de integración.

3. Integración Multiple: Se desea calcular $I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$

- a) Se aplica la regla de Simpson compuesta para $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Sea $y_j = c + j h_y$, donde $h_y = \frac{d-c}{m}$

- b) Se tiene $I(x) = \frac{h_y}{3}[f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_m)] + \frac{h_y}{3} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} [2f(x, y_{2k}) + 4f(x, y_{2k+1})]$,
 $E = -m \frac{h_y^5}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, \eta)$ con $\eta \in [c, d]$
- c) Luego $I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \simeq \int_a^b I(x) dx$
 $= \frac{h_y}{3} [\int_a^b f(x, y_0) dx + 4 \int_a^b f(x, y_1) dx + \int_a^b f(x, y_m) dx] + \frac{h_y}{3} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \left[2 \int_a^b f(x, y_{2k}) dx + 4 \int_a^b f(x, y_{2k+1}) dx \right]$
y el error es $E = -m \frac{h_y^5}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, \eta) dx$, con $\eta \in [c, d]$
- d) Si llamamos $I_k = \int_a^b f(x, y_k) dx$ para $k = 0 \dots m$, $\implies I \simeq \frac{h_y}{3} [I_0 + 4I_1 + I_m] + \frac{h_y}{3} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} [2I_{2k} + 4I_{2k+1}]$
- e) Se aplica la regla de Simpson compuesta para $I_k = \int_a^b f(x, y_k) dx$. Sea $x_j = a + jh_x$, donde $h_x = \frac{b-a}{n}$
- f) Se tiene $I_k = \frac{h_x}{3} [f(x_0, y_k) + 4f(x_1, y_k) + f(x_n, y_k)] + \frac{h_x}{3} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} [2f(x_{2i}, y_k) + 4f(x_{2i+1}, y_k)]$,
 $E_k = -n \frac{h_x^5}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\eta, y_k)$ con $\eta \in [c, d]$

Ejercicios

1. Calcule la integral impropia

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$$

Si $I = 2,9253035$, determine el error relativo

2. Considere la fórmula para integrar en dos variables:

$$\int \int_T f(x, y) dx dy \approx \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Donde T es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Note que el área del triángulo es $\frac{1}{2}$, y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es el baricentro del mismo.

- a) Deduzca que la fórmula es exacta para polinomios de grado 1 en dos variables
b) Extienda la fórmula a un triángulo cualquiera de vértices (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. **Hint:** Considere la transformación lineal

$$J(x, y) = (x_1 + (x_2 - x_1)x + (x_3 - x_1)y, y_1 + (y_2 - y_1)x + (y_3 - y_1)y)$$

Respuestas

1. Usando el método descrito, llamamos $g(x) = e^x$, $x^p = x^{\frac{1}{2}}$. El polinomio de Taylor para g es:

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx &= \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{24}x^{\frac{7}{8}} \right) \\ &= \left[2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{1}{45}x^{\frac{15}{8}} \right]_0^1 = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{45} = 3,0655123 \end{aligned}$$

Definimos entonces

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})}{x^{\frac{1}{2}}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para calcular la integral de G usamos el método de Simpson compuesto con algún valor de n . Por ejemplo $n = 8$

$$\Rightarrow \int_0^1 G(x) dx \approx \frac{h}{3} (G(x_0) + 4G(x_1) + 2G(x_2) + 4G(x_3) + G(x_4))$$

Donde $h = \frac{1}{4}$, $x_i = \frac{i}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. De aquí sale que $\int_0^1 G(x) dx \approx 1,769122 \times 10^{-3}$

$$\Rightarrow I \approx 3,0655123 + 1,769122 \times 10^{-3} = 3,0672814$$

Y luego $E_{abs} = 0,1419779$, $E_{rel} = 0,0485344$

2. Para esta parte, primero un comentario sobre la exactitud de esta fórmula. Dada una fórmula de integración del tipo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + Error$$

donde los c_i y los x_i son los que definen el método, al imponer exactitud para polinomios de cierto grado lo que queremos decir es que en la expresión anterior el Error es cero. Este es el enfoque que se utiliza en este problema.

- a) Sea entonces un polinomio de grado 1 en dos variables, esto es $p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$. Observemos que el triángulo T se puede parametrizar por $x \in [0, 1]$, $y \in [0, -x - 1]$. Luego la integral queda

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{-x-1} (\alpha x + \beta y + \gamma) dy dx = \int_0^1 ([\alpha xy]_0^{-x-1} + [\frac{\beta}{2} y^2]_0^{-x-1} + [\gamma y]_0^{-x-1}) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (\alpha x(1-x) + \beta(1-x)^2 + \gamma(1-x)) dx = \\
&\left[\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}[x - x^2 + \frac{1}{3}x^3] + \gamma x - \frac{\gamma}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \gamma) \\
&= \frac{1}{2}p \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}$$

b) Sea R el nuevo triángulo. Consideramos la transformación indicada. Notemos que

$$J(0,0) = (x_1, y_1), \quad J(1,0) = (x_2, y_2), \quad J(0,1) = (x_3, y_3)$$

Y la transformación es lineal. Esto basta para concluir que J transforma el triángulo T en el triángulo R . Esto es, $J(T) = R$. Invocamos ahora el Teorema de cambio de variable, que nos asegura que

$$\int_R f(y)dy = \int_T f(J(x))|J'(x)|dx$$

Donde J' alude al jacobiano de la función J , que es la matriz (constante, ya que la transformación es lineal)

$$J' = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante es $D = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$.

Finalmente, gracias a la parte anterior, sabemos que

$$\int_T f(J(x))dx \approx \frac{1}{2}f(J(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$$

Donde en particular la fórmula es exacta para polinomios hasta de grado 1. Esto nos provee de una manera de aproximar integrales en cualquier dominio triangular.

□