Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2008
Cálculo Numérico
MA33A-2

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliares: Constanza Maturana & Tomás González.

Auxiliar, miércoles 4 de junio

Problema 1 *(a) Se quiere encontrar un método numérico para estimar π. Para ello, primero encuentre dos funciones a las que aplicar el método de Newton (Piense en funciones trigonométricas). Encuentre y escriba explícitamente el método de Newton-Raphson para estas funciones*

(b) Sabiendo que el intervalo de convergencia de Newton es donde $|g'| < 1$, donde g es la función de iteración, encuentre una condición para x_0 (el primer punto de la iteración), que asegure convergencia hacia π. Concluya sobre el intervalo de convergencia en cada caso.

Solución

(a) Las funciones más sencillas posibles son $f_1(x) = sin(x)$, $f_2(x) = tan(x)$. Se comprueba trivialmente que $f_1(\pi) = 0 = f_2(\pi)$. Lo que queda es escribir el método de Newton Raphson para estas funciones. Notemos que

$$f_1'(x) = cos(x) \quad f_2'(x) = sec(x)^2 = \frac{1}{cos(x)^2}$$

Luego las iteraciones del método de Newton quedan de la siguiente manera: Para la función f_1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{sin(x_n)}{cos(x_n)} = x_n - tan(x_n)$$

Y para la segunda función

$$x_{n+1} = x_n - sin(x_n)cos(x_n)$$

(b) Tenemos la iteración en cada caso y las funciones de iteración:

$$g_1(x) = x - tan(x) \quad \Rightarrow g_1'(x) = 1 - sec(x)^2 = -tan(x)^2$$
$$g_2(x) = x - sin(x)cos(x) \quad \Rightarrow g_2'(x) = 1 - (cos(x)^2 - sin(x)^2) = 2sin(x)^2$$

Ahora veamos queé pasa con la convergencia. sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y veamos qué pasa con la derivada en cada caso. Para la primera función

$$|-tan(x_0)^2| < 1 \Leftrightarrow |tan(x_0)| < 1$$

En este caso, tenemos que, para asegurar la convergencia, debemos escoger $x_0 \in (n\pi - \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{4}), n \in \mathbb{Z}$. Más aún, como queremos que el método converja hacia π necesitamos escojer un x_0 cercano a π (de otro modo, el método va a converger pero a un múltiplo de π). Luego escogemos $x_0 \in (\pi - \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}) = (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$, y ese es el intervalo en que podemos asegurar la convergencia que queremos. Veamos qué pasa con la otra

$$|2sin(x_0)^2| < 1 \Leftrightarrow |sin(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y por propiedades conocidas de la función seno sabemos que eso se tiene en el mismo intervalo donde $|tan(x_0)| < 1$, con lo que concluimos que el intervalo de convergencia adecuado es el mismo que en caso anterior.

Problema 2 *Considere la ecuación de punto fijo $x = \frac{1}{2}cos(x)$. Muestre que existe una solución. Sea α el punto fijo. Justifique que la iteración*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}cos(x_n)$$

Converge a α. Calcule tres iteraciones (escoja $x_0 = 0$) y diga en cuántas iteraciones más se puede asegurar una aproximación a α que satisfaga una tolerancia dada ϵ. Compare lo anterior (brevemente) con el método de Newton y el método de bisección en cuanto a intervalo y rapidez de convergencia.

Solución: La manera más sencilla de ver que la ecuación de punto fijo tiene solución es definiendo

$$f(x) = x - \frac{1}{2}cos(x)$$

Como $f(0) = -\frac{1}{2} < 0,\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 0$, y además la función f es contínua, entonces debe existir $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $f(\alpha) = 0$, ie un punto fijo de la ecuación.
Por otro lado, si definimos $g(x) = \frac{1}{2}cos(x)$, dados $x, y \in \mathbb{R}$, (spdg $x < y$) se tiene (usando el teorema del valor medio)

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y), \quad \xi \in [y, x]$$

Y como $g'(\xi) = -\frac{1}{2}sin(\xi)$, sigue que

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Esto es, g es una función contractante (Lipschitz de constante < 1), con lo que el Teorema de punto fijo de Banach asegura que la iteración

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Converge a α, el punto fijo buscado (más aún, garantiza la existencia y unicidad del punto fijo). Las tres iteraciones quedan:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}cos(0) = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}cos(\frac{1}{2}) = 0.4388$$

$$x_3 = \frac{1}{2}cos(0.4388) = 0.4526$$

Falta ver la cantidad de iteraciones necesaria para una tolerancia dada. Sea $\epsilon > 0$ una tolerancia. Por el análisis de arriba (a partir del TVM), sale que, $\forall n \in \mathbb{N}$ (notando que $g(\alpha) = \alpha,\ g(x_n) = x_{n+1}$)

$$|g(x_n) - g(\alpha)| = |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|$$

A su vez $x_n = g(x_{n-1})$, luego podemos escribir

$$|x_n - \alpha| = |g(x_{n-1}) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - \alpha|$$

Luego reemplazando más arriba sale que

$$|g(x_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_{n-1} - \alpha|$$

Aplicando este mismo argumento varias veces sigue que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|$$

Ahora bien, por el análisis del principio sabemos que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, luego $|x_0 - \alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ (obs: ciertamente es posible mejorar estas cotas), luego para satisfacer la tolerancia basta con que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi}{2} \leq \epsilon$$

De donde se puede, dado ϵ, obtener un valor de n adecuado. Finalmente, una breve comparación con lo métodos de Newton y bisección. Si bien este método es mucho mejor en cuanto a intervalo de convergencia que el método de Newton (ya que converge en todo $\mathbb{R}$), el orden de convergencia es menor (el orden es comparable al de la bisección, lo que sale de las cotas obtenidas en la parte de recién).

Problema 3 *Considere el problema de aproximación polinomial:*

$$\min \int_0^1 (e^x - p(x))^2 dx$$

donde $p(x)$ es un polinomio de segundo grado. Resuelva el problema usando el método de Newton.

Solución: Nos interesa minimizar la función de error asociada al polinomio de aproximación: $E(a, b, c) = \int_0^1 (e^x - p(x))^2 dx, = \int_0^1 (e^x - a - bx - cx^2)^2 dx$. Dada la función E (observemos que tomamos E como función de a, b, c, los coeficientes del polinomio), podemos calcular su gradinte y Hessiano.

$$\nabla E = \begin{bmatrix} -2\int_0^1 (e^x - a - bx - cx^2)dx \\ -2\int_0^1 x(e^x - a - bx - cx^2)dx \\ -2\int_0^1 x^2(e^x - a - bx - cx^2)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b + \frac{2}{3}c - 2e + 2 \\ a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}c - 2 \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{2}{5}c - 2e + 4 \end{bmatrix}$$

$$H_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Aora bien, el problema de minimizar el error se relaciona con el de encontrar un cero para el gradiente de E, esto es, nos gustaría resolver el problema $\nabla E = \vec{0}$. Para ello usaremos el método de Newton Kantorovich. Lo primero es invertir el Hessiano

$$H_E^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -18 & 15 \\ -18 & 96 & -90 \\ 15 & -90 & 90 \end{bmatrix}$$

Y luego el método queda:

$$x_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

y para $k = 0, \ldots$

$$x_{k+1} = x_k - H_E^{-1}(x_k)\nabla E(x_k) = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -18 & 15 \\ -18 & 96 & -90 \\ 15 & -90 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_k + b_k + \frac{2}{3}c_k - 2e + 2 \\ a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{1}{2}c_k - 2 \\ \frac{2}{3}a_k + \frac{1}{2}b_k + \frac{2}{5}c_k - 2e + 4 \end{bmatrix}$$

Lo que determina el método.