Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Primavera 2007
Cálculo Numérico
MA-33A-3

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 10 de Octubre

Pauta Control 3

1) Se desea resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = e^{-x} \qquad (*)$$

Se quiere utilizar el método de Newton, pero se debe determinar el punto inicial x_0. Lo que se sabe es que existe una raiz en el intervalo $[0,1]$.

Para calcular la solución del problema se propone la siguiente metodología:

(a) Demuestre que existe una solución de la ecuación $(*)$ en el intervalo $[0,1]$.

(b) Encuentre la base modificada de Legendre $P_n^*(x)$ en el intervalo $[0,1]$, tal que mantenga la ortogonalidad.

n	0	1	2	3
$P_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2dx$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$

Hint: Calcule los valores de $\int_0^1 (P_n^*(x))^2dx$, $\forall n = 0,1,...3$, utilizando los valores de $\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2dx$ y un cambio de variable adecuado. Recuerde que esta base es ortogonal en el intervalo $[-1,1]$.

(c) Aproxime la ecuación no lineal $(*)$ a través de mínimos cuadrados, usando la base modificada de Legendre.

(d) Aplique el método de Graeffe para calcular la solución de la ecuación aproximada en $[0,1]$.

(e) Defina como x_0 la solución de la ecuación aproximada. Ahora, calcule la solución de la ecuación $(*)$ aplicando el método de Newton, con un error de 10^{-3}.

Obs: Para calcular integrales sin primitiva conocida, use la regla de Simpson Compuesto con un n adecuado dependiendo del caso. Use 4 cifras significativas en los cálculos.

Solución

1. Se desea resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-x} \qquad (*)$$

   (a) Existencia de solución en [0,1]

   Si definimos $f(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x}$, entonces las raices de $f(x)$ son soluciones de (*).
   Veamos que $f(x)$ tiene una raiz en [0,1]
   $f(0) = -1 < 0$
   $f(1) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-1} \approx \frac{1}{6}(e^0 + 4 \times e^{-\frac{1}{8}} + e^{-\frac{1}{2}}) - e^{-1} \approx 0.488\,2 > 0$
   Por TVM $\Rightarrow \exists \bar{x} \in [0,1],\ f(\bar{x}) = 0$.
   Aquí basta aproximar la integral con Simpson compuesto $n = 1$, ya que no se requiere mucho precisión y por la forma de $e^{-\frac{u^2}{2}}$ en $[0,1]$, que se aproxima bien con un polinomio cuadrático

   (b) La base modificada de Legendre $P_n^*(x)$ en el intervalo $[0,1]$

   $I_{i,j} = \int\limits_{-1}^1 P_j(x)P_m(x)dx$, haciendo el cambio de variable $u = \frac{x+1}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx$

   $I_{i,j} = \int\limits_0^1 P_j(2u-1)P_m(2u-1)2du$

   $\Rightarrow P_n^*(x) = P_n(2x-1),\ n = 0...3$, además, $\int\limits_0^1 P_j^*(x)P_m(x)dx = \frac{1}{2}I_{i,j}$, luego

n	0	1	2	3
$P_n^*(x)$	1	$2x-1$	$\frac{1}{2}(3(2x-1)^2-1)$	$\frac{1}{2}(5(2x-1)^3-3(2x-1))$
$\int\limits_{-1}^1 (P_n^*(x))^2dx$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$

   (c) Aproximación de la ecuación

   Vamos a aproximar $f(x)$ por
   $p(x) = a + b(2x-1) + c\frac{1}{2}(3(2x-1)^2-1) + d\frac{1}{2}(5(2x-1)^3-3(2x-1))$
   $\min E = \int\limits_0^1 (f(x)-p(x))^2dx$
   Luego, como la base es ortogonal, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int\limits_0^1 P_0^*(x)f(x)dx \\ \int\limits_0^1 P_1^*(x)f(x)dx \\ \int\limits_0^1 P_2^*(x)f(x)dx \\ \int\limits_0^1 P_3^*(x)f(x)dx \end{bmatrix}$$

   Calculemos la integral del lado derecho. Para esto, vamos a calcular las integrales con la base usual, y luego usaremos estos resultados para calcular las integrales:

i. $I_0 = \int_0^1 (\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x}) dx = \int_0^1 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} dudx - \int_0^1 e^{-x} dx = \int_0^1 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} dudx + e^{-1} - 1$

$e^{-1} - 1 \approx -0.632\,1$

Aproximemos la primera integral: $\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Como sabemos que el x solo se va a mover en el intervalo $[0,1]$, por la forma de $e^{-\frac{u^2}{2}}$, esta se puede aproximar bien con Simpson Compuesto $n = 1$

$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \approx \frac{x}{6}(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}})$

Luego, $\int_0^1 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} dudx \approx \frac{1}{6} \int_0^1 x(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}}) dx$

$\int_0^1 x dx = 0.5$

$\int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{8}} dx = (-4e^{-\frac{1}{8}x^2})\Big|_0^1 = 4(1 - e^{-\frac{1}{8}}) \approx 0.470\,0$

$\int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (-e^{-\frac{1}{2}x^2})\Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.393\,5$

$I_0 = \frac{1}{6}(0.5 + 4 \times 0.470\,0 + 0.393\,5) - 0.632\,1 \approx \frac{2.776}{6} - 0.632\,1 \approx 0.462\,7 - 0.632\,1$

$\Rightarrow I_0 \approx -0.169\,4$

Obs: El valor real es $I_0 \approx -0.169\,965\,5$

ii. $I_1 = \int_0^1 x(\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x}) dx = \int_0^1 x \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} dudx - \int_0^1 x e^{-x} dx$

$\int_0^1 x e^{-x} dx$, haciendo $u = x,\ v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1,\ v = -e^{-x}$

$\int_0^1 x e^{-x} dx = -xe^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1} \approx 0.264\,2$

Por argumentos anteriores:

$\int_0^1 x \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} dudx \approx \frac{1}{6} \int_0^1 x^2(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}}) dx$

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \approx 0.333\,3$

Para $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{8}} dx$ usamos Simpson:

$\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{8}} dx \approx \frac{1}{6}(0 + 4 \times \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{32}} + e^{-\frac{1}{8}}) = \frac{(e^{-\frac{1}{32}} + e^{-\frac{1}{8}})}{6} \approx \frac{1.852}{6} \approx 0.308\,7$

Para $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ usamos Simpson:

$\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{1}{6}(0 + 4 \times \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{8}} + e^{-\frac{1}{2}}) \approx \frac{1.489}{6} \approx 0.248\,2$

$I_1 \approx \frac{1}{6}(0.333\,3 + 4 \times 0.308\,7 + 0.248\,2) - 0.264\,2 \approx \frac{1.816}{6} - 0.264\,2 \approx 0.302\,7 - 0.264\,2$

$\Rightarrow I_1 \approx 0.038\,5$

Obs: El valor real es $I_1 \approx 0.03\,902$

iii. $I_2 = \int\limits_0^1 x^2(\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du - e^{-x})dx = \int\limits_0^1 x^2 \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}dudx - \int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx =$

$\int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx$, haciendo $u = x^2$, $v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 2x,\ v = -e^{-x}$

$\int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = 2\int\limits_0^1 xe^{-x}dx - e^{-1}$

De la parte anterior tenemos que $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx \approx 0.264\,2,$ luego

$\int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx \approx 2 \times 0.264\,2 - e^{-1} \approx 0.528\,4 - 0.367\,9 = 0.160\,5$

$\int\limits_0^1 x^2 \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}dudx \approx \frac{1}{6}\int\limits_0^1 x^3(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}})dx$

$\int\limits_0^1 x^3dx = \frac{1}{4} = 0.25$

Para $\int\limits_0^1 x^3e^{-\frac{x^2}{8}}dx$, haciendo $u = x^2$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{8}} \Rightarrow u' = 2x,\ v = -4e^{-\frac{1}{8}x^2}$

$\int\limits_0^1 x^3e^{-\frac{x^2}{8}}dx = -x^2 4e^{-\frac{1}{8}x^2}\Big|_0^1 + 8\int\limits_0^1 xe^{-\frac{1}{8}x^2}dx = 8\int\limits_0^1 xe^{-\frac{1}{8}x^2}dx - 4e^{-\frac{1}{8}}$

De la parte anterior tenemos que $\int\limits_0^1 xe^{-\frac{1}{8}x^2} \approx 0.470\,0$

$\int\limits_0^1 x^3e^{-\frac{x^2}{8}}dx \approx 8 \times 0.470\,0 - 4 \times 0.882\,5 \approx 3.76 - 3.53 = 0.23$

De forma similar, con $\int\limits_0^1 x^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\ u = x^2,\ v' = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = 2x,\ v = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\int\limits_0^1 x^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2\int\limits_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx - e^{-\frac{1}{2}}$

De la parte anterior, $\int\limits_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx \approx 0.393\,5$

$\int\limits_0^1 x^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 2 \times 0.393\,5 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.787\ -0.606\,5 \approx 0.180\,5$

$I_2 \approx \frac{1}{6}(0.25 + 4 \times 0.23 + 0.180\,5) - 0.160\,5 \approx \frac{1.351}{6} - 0.160\,5 \approx 0.225\,2 - 0.160\,5 \approx$
$\Rightarrow I_2 \approx 0.064\,7$

Obs: El valor real es $I_2 \approx 0.06446\,93$

iv. $I_3 = \int\limits_0^1 x^3(\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du - e^{-x})dx = \int\limits_0^1 x^3 \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}dudx - \int\limits_0^1 x^3e^{-x}dx$

Para $\int\limits_0^1 x^3e^{-x}dx,$ con $u = x^3,\ v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 3x^2,\ v = -e^{-x}$

$\int\limits_0^1 x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x}\Big|_0^1 + 3\int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx$

De la parte anterior, $\int\limits_0^1 x^2e^{-x}dx \approx 0.160\,5$

$\int\limits_0^1 x^3e^{-x}dx \approx 3 \times 0.160\,5 - e^{-1} \approx 0.481\,5 - 0.367\,9 = 0.113\,6$

$\int\limits_0^1 x^3 \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx \approx \frac{1}{6} \int\limits_0^1 x^4 (1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}}) dx$

$\int\limits_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} = 0.2$

Para $\int\limits_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{8}} dx$,haciendo $u = x^3$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{8}} \Rightarrow u' = 3x^2,\ v = -4e^{-\frac{1}{8}x^2}$

$\int\limits_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{8}} dx = -4x^3 e^{-\frac{1}{8}x^2}\Big|_0^1 + 12 \int\limits_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{8}x^2} dx$

Por la parte anterior, $\int\limits_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{8}x^2} dx \approx 0.308\,7$, luego

$\int\limits_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{8}} dx \approx 12 \times 0.308\,7 - 4 \times e^{-\frac{1}{8}} \approx 0.174\,4$

De forma similar para $\int\limits_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, haciendo $u = x^3$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = 3x^2,\ v = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\int\limits_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^1 + 3 \int\limits_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Por la parte anterior, $\int\limits_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx 0.248\,2$,luego

$\int\limits_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 3 \times 0.248\,2 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.138\,1$

$I_3 \approx \frac{1}{6}(0.2 + 4 \times 0.174\,4 + 0.138\,1) - 0.113\,6 \approx \frac{1.\,146}{6} - 0.113\,6 \approx 0.191\ - 0.113\,6 = 0.077\,4$

Obs: El valor real es $I_3 \approx 0.06478\,95$

Finalmente:

$\int\limits_0^1 P_0^*(x) f(x) dx = \int\limits_0^1 f(x) dx = I_0 = -0.169\,4$

$\int\limits_0^1 P_1^*(x) f(x) dx = 2 \int\limits_0^1 x f(x) dx - \int\limits_0^1 x f(x) dx = 2I_1 - I_0 = 2 \times 0.038\,5 + 0.169\,4 = 0.246\,4$

$\int\limits_0^1 P_2^*(x) f(x) dx = \int\limits_0^1 (6x^2 - 6x + 1) f(x) dx = 6I_2 - 6I_1 + I_0$

$= 6 \times 0.064\,7 - 6 \times 0.038\,5 - 0.169\,4 = -0.012\,2$

$\int\limits_0^1 P_3^*(x) f(x) dx = \int\limits_0^1 (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1) f(x) dx = 20I_3 - 30I_2 + 12I_1 - I_0$

$= 20 \times 0.077\,4\ - 30 \times 0.064\,7 + 12 \times 0.038\,5 + 0.169\,4 = 0.238\,4$

$\Rightarrow p(x) = -0.169\,4 + 3 \times 0.246\,4(2x - 1) - 5 \times 0.012\,2(6x^2 - 6x + 1)$

$+7 \times 0.238\,4(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)$

$\Rightarrow p(x) = 33.\,38x^3 - 50.\,43x^2 + 21.\,87x - 2.\,638$

(d) Graeffe

Sabemos que las raices de $p(x)$ son las mismas raices que

$p_0(x) = x^3 - \frac{50.\,43}{33.\,38}x^2 + \frac{21.\,87}{33.\,38}x - \frac{2.\,638}{33.\,38} = x^3 - 1.\,511x^2 + 0.655\,2x - 0.07903$

i. $p_0(x)p_0(-x) = (x^3 - 1.\,511x^2 + 0.655\,2x - 0.07903\,)(-x^3 - 1.\,511x^2 - 0.655\,2x - 0.07903\,)$

$p_1(x^2) = -x^6 + 0.972\,7\,x^4 - 0.190\,5x^2 + 0.006\,246$

ii. $p_1(x)p_1(-x) = (-x^3 + 0.972\,7\,x^2 - 0.190\,5x + 0.006\,246)(x^3 + 0.972\,7\,x^2 + 0.190\,5x +$

$0.006\,246)$

$p_2(x^2) = -x^6 + 0.565\,1x^4 - 0.024\,14x^2 + 0.000\,039\,01$

Luego,

$x_1 \approx \sqrt[4]{0.565\,1} \approx 0.867\,0$

$x_2 \approx \sqrt[4]{\frac{0.024\,14}{0.565\,1}} \approx 0.4546$

$x_3 \approx \sqrt[4]{\frac{0.000\,039\,01}{0.024\,14}} \approx 0.2005$

Evaluando en $p_0(x)$

$p_0(x_1) = (0.8670)^3 - 1.511(0.8670)^2 + 0.655\,2(0.8670) - 0.07903 \approx 0.004\,941$

$p_0(x_2) = (0.4546)^3 - 1.511(0.4546)^2 + 0.655\,2(0.4546) - 0.07903 \approx 0.000\,507\,1$

$p_0(x_3) = (0.2005)^3 - 1.511(0.2005)^2 + 0.655\,2(0.2005) - 0.07903 \approx -0.000\,344\,8$

(e) Newton

En las primeras iteraciones basta con Simpson Compuesto de $n = 1$

Llamando $x_0 = 0.2005$

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du - e^{-x}}{e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x}}$

i. $\int_0^{0.2005} e^{-\frac{u^2}{2}}du \approx \frac{0.2005}{6}(1 + 4e^{-\frac{(0.1003)^2}{2}} + e^{-\frac{(0.2005)^2}{2}}) \approx 0.199\,2$

$g(x_0) = 0.2005 - \frac{0.199\,2 - e^{-0.2005}}{e^{-\frac{0.2005^2}{2}} + e^{-0.2005}} \approx 0.2005 + \frac{0.619\,1}{1.798} \approx 0.544\,8 = x_1$

ii. $\int_0^{0.544\,8} e^{-\frac{u^2}{2}}du \approx \frac{0.544\,8}{6}(1 + 4e^{-\frac{(0.272\,4)^2}{2}} + e^{-\frac{(0.544\,8)^2}{2}}) \approx 0.519\,1$

$g(x_1) = 0.544\,8 - \frac{0.519\,1 - e^{-0.544\,8}}{e^{-\frac{0.544\,8^2}{2}} + e^{-0.544\,8}} \approx 0.544\,8 + \frac{6.086 \times 10^{-2}}{1.442} \approx 0.587 = x_2$

iii. $\int_0^{0.587} e^{-\frac{u^2}{2}}du \approx \frac{0.587}{6}(1 + 4e^{-\frac{(0.293\,5)^2}{2}} + e^{-\frac{(0.587)^2}{2}}) \approx 0.555\,0$

$g(x_2) = 0.587 - \frac{0.555\,0 - e^{-0.587}}{e^{-\frac{0.587^2}{2}} + e^{-0.587}} \approx 0.587 + \frac{9.928 \times 10^{-4}}{1.3978} \approx 0.587\,7 = x_3$

iv. Para ver si $|f(x_3)| < 10^{-3}$, debemos calcular la integral con mayor precisión, luego

$\int_0^{0.5877} e^{-\frac{u^2}{2}}du \approx \frac{0.5877}{12}(1 + 4e^{-\frac{0.147^2}{2}} + 2e^{-\frac{0.293\,9^2}{2}} + 4e^{-\frac{0.440\,8^2}{2}} + e^{-\frac{0.5877^2}{2}}) \approx 0.555\,5$

$f(x_3) = 0.555\,5 - e^{-0.5877} \approx 0.555\,5 - 0.555\,6 = -0.000\,1$

$\Rightarrow |f(x_3)| = 10^{-4} < 10^{-3}$

Solución: $\bar{x} = 0.587\,7$