Control 3 MA-33A-2 2007-1

Profesor Dr. Gonzalo Hernandez - Auxiliar Gonzalo Rios

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Integración Compuesta de Legendre:

Los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con la función de peso $w(x) = 1$.

Los tres primeros polinomios de Legendre son:

n	0	1	2
$Le_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Nos interesa encontrar una fórmula análoga a Simpson Compuesto usando Cuadratura de Gauss-Legendre. Para eso:

(a) Encuentre las raices x_1 y x_2 de $Le_2(x)$. Calcule los coeficientes c_1 y c_2 de manera que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

tenga el mayor grado de precisión posible. ¿Qué precisión tiene la fórmula?

(b) Haga el cambio de variable respectivo para poder integrar con la fórmula anterior en cualquier intervalo $[a, b]$, y explicíte la fórmula general

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx d_1 f(t_1) + d_2 f(t_2)$$

(c) Haciendo la misma analogía que con Simpson Compuesto, dado un intervalo $[a, b]$ y un entero n (no necesariamente par), encuentre la fórmula de Gauss-Legendre Compuesto, que se basa en aplicar la fórmula anterior a n subintervalos de $[a, b]$. Denote $h = \frac{b-a}{n}$.

(d) Obs: con $n = 1$, se obtiene Gauss-Legendre Simple

(e) Calcule la integral $\int_0^1 x^x dx$ con Simpson Compuesto $n_s = 4$ y Gauss-Legendre Compuesto $n_l = 2$. Si el valor real es $I = 0.783\,430\,51$, compare ambas cuadraturas.

2) Modelo de propagación de una enfermedad en una isla

Considere una isla aislada con una problacion de n personas. Una porción de la población viaja al extranjero y regresa infectada con una enfermedad altamente contagiosa. Se desea predecir la numero de personas $y(t)$ que estarán infectadas en un instante de tiempo t. Para esto considere el siguiente modelo M:

$$\frac{dy}{dt} = ky(n - y) \tag{M}$$

donde $k > 0$ es una constante.

(a) Cuáles son las hipótesis que se han hecho para establecer el modelo M ? Discuta su validez. Como podria estimar la constante k ?

(b) Grafique $\dfrac{dy}{dt}$ vs y.
Grafique y vs t si el número de inicial de personas infectadas es $y_1 < \frac{n}{2}$ y $y_2 > \frac{n}{2}$.
Discuta la solución cualitativa encontrada en cada caso.

(c) Determine la solución analítica del modelo M.

(d) Considere una isla con una población de $n = 5000$. Durante la epidemia, en distintos instantes se ha medido la siguiente cantidad de personas infectadas:

t [días]	2	6	10
$y(t)$	1887	4087	4853

i) Compare la solución analítica de M encontrada en (c) con los datos reales. El modelo representa bien los datos ?

ii) Compare la solución analítica de M encontrada en (c) con la solución numérica determinada mediante el método de Runge-Kutta de orden 2:

$$\begin{aligned} q_k^1 &= hf(t_k, y_k) \\ q_k^2 &= hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}) \\ y_{k+1} &= y_k + q_k^2 \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Que puede decir de la precisión de la solución numérica ?