

Pauta Control #1 MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2007-1, Prof. Salomé Martínez, Auxiliar: N. Carreño, M. Concha, F. Collarte

P1.- (a) Se tiene que la ecuación es exacta, pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

donde

$$M(x, y) = e^x + y, N(x, y) = 2 + x + ye^y$$

Se debe tener

$$M = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$N = \frac{\partial H}{\partial y}$$

Integrando con respecto a x

$$H(x, y) = e^x + xy + c(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial y} = x + c'(y) = 2 + x + ye^y$$

$$\Rightarrow c'(y) = 2 + ye^y$$

$$\Rightarrow c(y) = 2y + (y - 1)e^y$$

Luego

$$H(x, y) = C \Rightarrow e^x + xy + 2y + (y - 1)e^y = C$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 1$ se obtiene

$$1 + 2 = C \Rightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow e^x + xy + 2y + (y - 1)e^y = 3$$

(b) Recordemos que si y_1 es solución de la ecuación homogénea, una segunda solución la obtenemos mediante

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1(t)} e^{-\int p(s)ds} dt$$

cuando $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Así usando la fórmula llegamos a

$$y_2(x) = x \int \frac{1}{t^2} e^{-\int \frac{-2s}{1-s^2} ds} dt$$

$$y_2(x) = x \int \frac{1}{t^2} \frac{1}{1-t^2}$$

$$y_2(x) = x \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt$$

$$y_2(x) = x \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) \right) dt$$

$$y_2(x) = x \left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]$$

$$y_2(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1$$

Así, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = Ax + B \left(\frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 \right)$$

P2.- (a) Busquemos una expresión para $\frac{y' - y'_1}{y - y_1}$. Tenemos que

$$y' + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$$

$$y'_1 + a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + a_0 = 0$$

Restamos las ecuaciones

$$y' - y'_1 + a_2(y^2 - y_1^2) + a_1(y - y_1) = 0$$

$$\frac{y' - y'_1}{y - y_1} + a_2(y + y_1) + a_1 = 0.$$

Análogamente para $\frac{y' - y'_2}{y - y_2}$, se tiene

$$\frac{y' - y'_2}{y - y_2} + a_2(y + y_2) + a_1 = 0.$$

Restando las dos expresiones anteriores se obtiene

$$\frac{y' - y'_1}{y - y_1} - \frac{y' - y'_2}{y - y_2} = a_2(y_2 - y_1)$$

Integramos con respecto a x

$$\ln(y - y_1) - \ln(y - y_2) = \int a_2(y_2 - y_1) dx + C$$

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C e^{\int a_2(y_2 - y_1) dx}.$$

(b) Usando la parte anterior, tenemos una expresión para $\frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}$, la cual está dada por

$$\frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C e^{\int a_2(y_1 - y_2) dx}$$

De esta forma, llegamos a

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C e^{\int a_2(y_2 - y_1) + a_2(y_1 - y_2) dx} = C.$$

(c) (\Rightarrow) Tenemos que $y = m$ es solución. Se tiene que $y' = 0$ y satisface la ecuación, es decir,

$$am^2 + bm + c = 0.$$

(\Rightarrow) Ahora m satisface $m^2 + bm + c = 0$, y tenemos que ver que $y = m$ es solución de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0 + am^2 + bm + c = 0$$

donde la segunda igualdad es por hipótesis. Así, se tiene que $y = m$ es solución de la ecuación.

(d) Notemos que la ecuación es de la forma de la parte (c). Así, $y = m$ será solución si m satisface

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m + 2)(m + 1) = 0.$$

Tenemos entonces que $y_1 = -1$ y $y_2 = -2$ son dos soluciones particulares. Por la parte (a), tenemos que la solución general cumple con

$$\frac{y - (-1)}{y - (-2)} = Ce^{\int -2 - (-1)dx}$$

$$\frac{y + 1}{y + 2} = Ce^{-x}$$

Despejando y se obtiene finalmente

$$y = \frac{2Ce^{-x} - 1}{1 - Ce^{-x}}.$$

P3.- (a) La ecuación diferencial para el problema del contenedor tiene la siguiente forma

$$y'(t) = (\text{tasa de entrada}) - (\text{tasa de salida}).$$

En este caso, $y(t)$ es la masa del contaminante en el contenedor. Así la tasa de entrada del contaminante al contenedor viene dada por

$$\text{tasa de entrada} = aq.$$

Por otro lado se tiene que

$$\text{tasa de salida} = by(t) + a\frac{y(t)}{V}.$$

La ecuación que modela el problema es entonces

$$y'(t) = aq - \left(b + \frac{a}{V}\right)y.$$

(b) Llamemos $K = b + \frac{a}{V}$.

$$y' + Ky = aq$$

Multiplicando por el factor integrante e^{Kt} , se obtiene

$$(ye^{Kt})' = aqe^{Kt}$$

$$y = \frac{aq}{K} + Ce^{-Kt}$$

Con la condición inicial $y(0) = y_0$ podemos calcular C

$$C = y_0 - \frac{aq}{K}$$

y así tenemos finalmente

$$y(t) = \frac{aq}{b + \frac{a}{V}} + \left(y_0 - \frac{aq}{b + \frac{a}{V}} \right) \exp \left(- \left(b + \frac{a}{V} \right) t \right).$$

(c) Es fácil ver que $y(t) \rightarrow \frac{aq}{b + \frac{a}{V}}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

P4.- Primero veamos el polinomio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1 - k}.$$

Notemos que si λ es real, no se puede tener la condición $y(x_0) = 0, y(x_0 + \pi/2) = 0$ (verificar). Por lo tanto, las raíces del polinomio característico deben ser complejas, por lo que una primera condición es $k > 1$. Así, la solución general de la ecuación es (denotando $\omega = \sqrt{k - 1}$)

$$y(x) = e^{-x}(A \operatorname{sen}(\omega x) + B \operatorname{cos}(\omega x)).$$

Como e^{-x} no se anula, la omitiremos de ahora en adelante. Veamos la primera condición:

$$y(x_0) = A \operatorname{sen}(\omega x_0) + B \operatorname{cos}(\omega x_0) = 0$$

$$\Rightarrow A \operatorname{sen}(\omega x_0) = -B \operatorname{cos}(\omega x_0)$$

Ahora la segunda condición:

$$y(x_0 + \pi/2) = A \operatorname{sen}(\omega(x_0 + \pi/2)) + B \operatorname{cos}(\omega(x_0 + \pi/2)) = 0$$

$$A [\operatorname{sen}(\omega x_0) \operatorname{cos}(\omega \pi/2) + \operatorname{sen}(\omega \pi/2) \operatorname{cos}(\omega x_0)] + B [\operatorname{cos}(\omega x_0) \operatorname{cos}(\omega \pi/2) - \operatorname{sen}(\omega x_0) \operatorname{sen}(\omega \pi/2)] = 0$$

Supongamos que $\operatorname{sen}(\omega x_0) \neq 0$

$$A = -B \frac{\operatorname{cos}(\omega x_0)}{\operatorname{sen}(\omega x_0)}$$

Reemplazando en la igualdad anterior

$$-B \frac{\operatorname{cos}(\omega x_0)}{\operatorname{sen}(\omega x_0)} [\operatorname{sen}(\omega x_0) \operatorname{cos}(\omega \pi/2) + \operatorname{sen}(\omega \pi/2) \operatorname{cos}(\omega x_0)] + B [\operatorname{cos}(\omega x_0) \operatorname{cos}(\omega \pi/2) - \operatorname{sen}(\omega x_0) \operatorname{sen}(\omega \pi/2)] = 0$$

$$B [-\operatorname{cos}(\omega x_0) \operatorname{cos}(\omega \pi/2) - \frac{\operatorname{sen}(\omega \pi/2)}{\operatorname{sen}(\omega x_0)} \operatorname{cos}^2(\omega x_0) + \operatorname{cos}(\omega x_0) \operatorname{cos}(\omega \pi/2) - \operatorname{sen}(\omega x_0) \operatorname{sen}(\omega \pi/2)] = 0$$

$$-\frac{B}{\operatorname{sen}(\omega x_0)} [\operatorname{sen}(\omega \pi/2) \operatorname{cos}^2(\omega x_0) + \operatorname{sen}^2(\omega x_0) \operatorname{sen}(\omega \pi/2)] = -\frac{B}{\operatorname{sen}(\omega x_0)} \operatorname{sen}(\omega \pi/2) = 0$$

Notemos que $B \neq 0$, pues si lo fuera, y sería idénticamente nula. Así, concluimos que

$$\operatorname{sen}(\omega \pi/2) = 0 \Rightarrow \omega \pi/2 = n\pi \Rightarrow k = 4n^2 + 1$$

Ahora, si $\text{sen}(\omega x_0) = 0$, tenemos que $B = 0$, con lo que

$$y = Ae^{-x} \text{sen}(\omega x)$$

La segunda condición

$$y(x_0 + \pi/2) = A \text{sen}(\omega(x_0 + \pi/2)) = 0$$

$$A[\text{sen}(\omega x_0) \cos(\omega\pi/2) + \cos(\omega x_0) \text{sen}(\omega\pi/2)] = A \cos(\omega x_0) \text{sen}(\omega\pi/2) = 0$$

Como $A \neq 0$, pues y no es nula, y $\cos(\omega x_0) \neq 0$, concluimos que

$$\text{sen}(\omega\pi/2) = 0 \Rightarrow \omega\pi/2 = n\pi \Rightarrow k = 4n^2 + 1$$