

**Control #1 MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**  
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.**  
**Semestre 2006-2, Prof. Axel Osses, Auxiliares: J. Lemus, N. Carreño**

**P1.-** Se propone un modelo para la aparición de inconformistas en una sociedad. La sociedad tiene una población de  $y(t)$  individuos en un tiempo  $t \geq 0$ . Se supone que si dos inconformistas tienen hijos, éstos también lo serán. Además, una proporción fija  $r \in (0, 1)$  de los hijos del resto de la población también se volverán inconformistas. Las tasas de natalidad y mortalidad son  $n > 0$  y  $m > 0$  respectivamente. Sea  $z(t)$  la población de inconformistas, entonces:

$$\begin{cases} y' = (n - m)y \\ z' = (n - m)z + nr(y - z) \end{cases}$$

- (a) Explique qué representa la variable  $p = z/y$ . Encuentre una EDO de primer orden para  $p$ .
- (b) Si  $y_0 > z_0 > 0$ ,  $p_0 = z_0/y_0$  son las condiciones iniciales, encuentre  $y(t)$ ,  $p(t)$  y a partir de esto encuentre  $z(t)$ .
- (c) Grafique la evolución de  $p(t)$  en el tiempo. ¿Qué predice el modelo cuándo  $t \rightarrow +\infty$ ?
- (d) Muestre que la mitad de la población que no era inconformista se vuelve inconformista en un tiempo  $t = \frac{\ln(2)}{nr}$ .

**P2.-** Identifique cada una de las siguientes ecuaciones, indicando orden, tipo y resuélvalas :

- (a)  $y' - \cos x = 2y$
- (b)  $y' - \frac{y}{x} = y^6$
- (c)  $y' = \frac{2x+y}{3x-y}$
- (d)  $(D^2 + 1)(D + 3)^2(D - 1)^3y = 0$
- (e)  $\int_0^x \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds = y'(x)$

**P3.-** Considere una botella con arena bajo la acción de la gravedad que flota sin desplazarse horizontalmente en un recipiente que contiene un líquido viscoso (puede pensar en una boya). Ante una perturbación del líquido, su desplazamiento vertical  $y$  con respecto al equilibrio se puede modelar por la siguiente ecuación diferencial, donde  $a > 0$ :

$$y'' + 2a y' + 2a^2 y = e^{-t} \cos(t).$$

- (a) Si  $a \neq 1$  ¿Qué forma tiene la solución homogénea y particular? (sin evaluar constantes).
- (b) Si  $a = 1$  ¿Cuál es la solución particular? (evaluando las constantes).
- (c) Si  $a = 1$  y la botella parte del reposo. ¿Cuál es la solución completa? (evaluando las constantes).