

Pauta Control #1 MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2006-2, Prof. Axel Osses, Auxiliar: J. Lemus, N. Carreño

- P1.-** (a) La variable $p = z/y$ representa la proporción de individuos inconformistas en la sociedad. Al calcular p' tenemos

$$p' = \left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y - zy'}{y^2} = \frac{((n-m)z + nr(y-z))y - z(n-m)y}{y^2} = nr(1-p)$$

- (b) Para encontrar, resolvemos la ecuación a variables separables

$$y' = (n-m)y,$$

que tiene como solución

$$y(t) = y_0 e^{(n-m)t}.$$

La ecuación para p es a variables separables (o también ecuación lineal). Se obtiene

$$p(t) = 1 - (1 - p_0)e^{-nrt}.$$

A partir de esto, como $z(t) = p(t)y(t)$, se obtiene

$$z(t) = (y_0 e^{(n-m)t})(1 - (1 - p_0)e^{-nrt}).$$

- (c) Cuando t tiende a ∞ , $p(t)$ tiende a 1.
(d) La cantidad de gente que inicialmente era inconformista es $y_0 - z_0$. Queremos encontrar el tiempo en que la proporción de inconformistas sea la inicial más la mitad de los que inicialmente no eran inconformistas, es decir, buscamos t^* tal que

$$p(t^*) = p_0 + \frac{(1 - p_0)}{2} = \frac{(1 + p_0)}{2} \Rightarrow 1 - (1 - p_0)e^{-nrt} = \frac{(1 + p_0)}{2} \Rightarrow \frac{(1 - p_0)}{2} = (1 - p_0)e^{-nrt}$$

Despejando t^* obtenemos

$$t^* = \frac{\ln(2)}{nr}$$

- P2.-** (a) Lineal orden 1, no homogénea. Resolvemos por factor integrante e^{-2x} . Con esto la ecuación queda:

$$(ye^{-2x})' = e^{-2x} \cos x$$

Integrando dos veces por partes se obtiene

$$y(x) = \frac{2}{5} \left(\frac{\sin x}{2} - \cos x \right) + Ke^{2x}$$

- (b) Es tipo Bernoulli, se hace el cambio de variables $z = \frac{1}{y^5}$ lo que reduce la ecuación a la siguiente ecuación lineal de orden 1

$$\frac{-z'}{5} - z = 1 \Leftrightarrow z' + 5z = -5$$

Esta ecuación tiene factor integrante e^{5x} , con lo que la solución general es

$$z(x) = -1 + Ke^{-5x}.$$

De acá, obtenemos y .

(c) Es homogénea, por lo que hacemos el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$, con lo que se llega a la ecuación:

$$z'x + z = \frac{2+z}{3-z} \Leftrightarrow z' = \frac{z^2 - 2z + 2}{3-z}$$

Esta ecuación es a variables separables en z . Luego

$$\int \frac{3-z}{z^2 - 2z + 2} dz = x$$

Calculando esta última integral,

$$\int \frac{3-z}{z^2 - 2z + 2} dz = \int \frac{2}{(z-1)^2 + 1} - \int \frac{z-1}{(z-1)^2 + 1} = 2 \arctan(z-1) - \frac{1}{2} \ln((z-1)^2 + 1)$$

Ahora reemplazando z del cambio de variables obtenemos una solución implícita en y .

(d) Es una ecuación lineal de orden 7 homogénea con polinomio característico

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 3)^2(\lambda - 1)^3 y = 0.$$

La solución general viene dada por:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-3x} + c_5 x e^{-3x} + c_6 \sin x + c_7 \cos x.$$

(e) Derivamos la ecuación y obtenemos

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Hacemos el cambio de variables $z = y'$ y llegamos a una ecuación de variables separables.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = x.$$

Resolviendo esta integral, mediante el cambio de variables $z = \operatorname{tg}(\theta)$ obtenemos

$$\int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\theta)}} = \int \sec(\theta) d\theta = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta).$$

De acá encontramos

$$\ln(\sec \arctan z + z) = x + K \Leftrightarrow \sqrt{1+z^2} + z = C e^x$$

reemplazando z por y' obtenemos

$$y' + \sqrt{1 + (y')^2} = C e^x$$

Integrando esta ecuación y usando la ecuación inicial obtenemos

$$y + y' = C e^x + K$$

La que es una ecuación lineal. Integrándola obtenemos:

$$y = (C e^{2x} + K e^x) + B$$

P3.- (a) El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + 2a^2.$$

Las raíces de este polinomio son $\lambda_1 = -a + i$ y $\lambda_2 = -a - i$. Luego la solución homogénea es

$$y_H(t) = e^{-at}(c_1 \sen t + c_2 \cos t).$$

La forma de la solución particular la encontramos mediante el polinomio anulador de $e^{-t} \cos t$ que es $(D + 1)^2 + 1$, cuyas raíces son $-1 + i$ y $-1 - i$, las que no cambian las raíces del polinomio característico de la homogénea si $a \neq 1$. Luego la solución particular tiene la forma $y_P = e^{-t}(\alpha_1 \sen t + \alpha_2 \cos t)$ con α_i por determinar.

(b) Si $a = 1$, la raíz del polinomio anulador aumenta la multiplicidad de la raíz del polinomio característico, con lo que ahora la solución particular tiene la forma

$$y_P = e^{-t}(\alpha_1 t \sen t + \alpha_2 t \cos t).$$

Despejando todas las constantes se obtiene que la solución particular es

$$y_P(x) = \frac{t}{2} e^{-t} \sen t.$$

(c) Alcanzará una mayor oscilación debido a que se produce el fenómeno de resonancia.