

Control 1 MA 26A, 2005/5, M. Kowalczyk

1.

- (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

$$y' - 3y = x$$

- (b) Encuentre la solución de la misma ecuación tal que $y(0) = y_0$.

- (c) Encuentre y_0^* en (b) tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = -\frac{1}{3}$$

- (d) Represente gráficamente las soluciones $y(x)$ con condiciones iniciales distintos a y_0^* .

- (e) Sea $\phi(x)$ una función continua tal que

$$\phi'(x) - 3\phi(x) \leq x, \quad \phi(0) = -\frac{1}{9}$$

Demuestre que

$$\phi(x) \leq -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}, \quad x \geq 0.$$

Indicación: Use la función $\mu(x) = e^{-3x}$ como factor integrante de la desigualdad.

Solución.

- (a) Usando el factor integrante $\mu(x) = e^{-3x}$ se tiene

$$(y' - 3y)e^{-3x} = \frac{d}{dx}(ye^{-3x}) = xe^{-3x} \quad (1)$$

Integramos (1) desde 0 a x y multiplicamos por e^{3x}

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0)e^{3x} + e^{3x} \int_0^x se^{-3s} ds \quad (\text{integración por partes}) \\ &= \left(y(0) + \frac{1}{9}\right)e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

La solución general tiene forma

$$y(x) = \left(c + \frac{1}{9}\right)e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

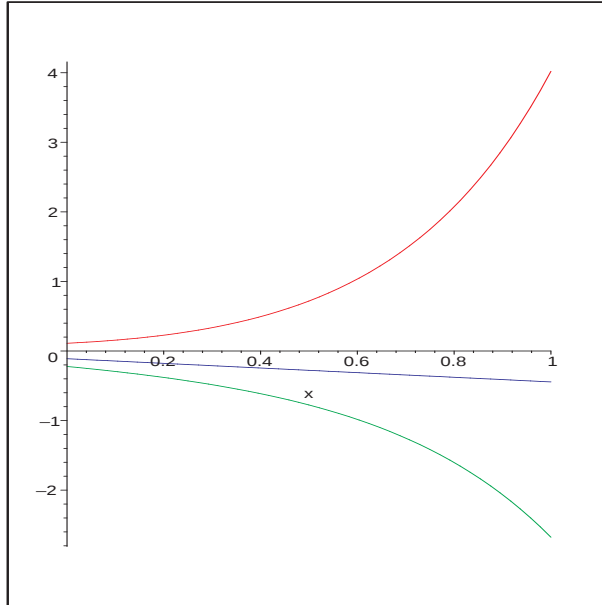


Figure 1: Solutions with $y_0 = 1/9$ (red), $y_0 = -1/9$ (blue), $y_0 = -2/9$ (green).

con una constante arbitraria c .

(b) Usando la formula en (a) se tiene con $y(0) = y_0$

$$y(x) = \left(y_0 + \frac{1}{9}\right) e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

(c) Si la condición inicial $y_0^* = -\frac{1}{9}$ entonces

$$y(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{9x}\right) = -\frac{1}{3}$$

(d) Ilustración 1.

(e) Usando $\mu(x) = e^{3x}$ como en (a) se tiene

$$e^{-3x}(\phi' - 3\phi) = \frac{d}{dx}(\phi e^{-3x}) \leq x e^{-3x} \quad (2)$$

Integrando la desigualdad (2) desde 0 a x se tiene

$$\phi(x)e^{-3x} \leq \phi(0) + \int_0^x se^{-3s} ds$$

entonces

$$\phi(x) \leq \left[\phi(0) + \frac{1}{9} \right] e^{3x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right)$$

Si $\phi(0) = -\frac{1}{9}$ entonces

$$\phi(x) \leq -\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right)$$

2. Una solución de la ecuación

$$\mathcal{L}y = y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

es $y(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

- (a) Encuentre la solución general de la ecuación (3).
- (b) Encuentre la solución general de la ecuación $\mathcal{L}y = x$.
- (c) Determine la función de Green de la operador $\mathcal{L}$.
- (d) Sea $y(x)$ una solución de (3) y sea $\phi(s) = y(e^s)$. Demuestre que ϕ satisface una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Encuentre la solución general de esta ecuación.

Solución.

(a) Usaremos el procedimiento de reducción de orden. Llamaremos $y_1(x) = x^{1/2}$ y buscaremos el otro elemento del conjunto fundamental en la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$. Reemplazando y_2 en la ecuación se tiene la siguiente ecuación para $u(x)$:

$$u''x^{1/2} + u'x^{-1/2} = 0$$

entonces

$$\frac{d}{dx}(xu') = 0 \implies xu' = c$$

Se tiene (escogemos $c = 1$)

$$u = \ln x$$

Entonces $y_2(x) = x^{1/2} \ln x$. Verifiquemos que las funciones $(x^{1/2}, x^{1/2} \ln x)$ forman el conjunto fundamental

$$W(x^{1/2}, x^{1/2} \ln x) = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{1/2} \ln x \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & \frac{1}{2}x^{-1/2} \ln x + x^{-1/2} \end{vmatrix} = 1 \quad (4)$$

La solución general

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{1/2} \ln x$$

(b) Usando la formula de variación de parámetros se tiene

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 x^{1/2} + c_2 x^{1/2} \ln x - x^{1/2} \int x \cdot x^{1/2} \ln x \, dx + x^{1/2} \ln x \int x \cdot x^{1/2} \, dx \\ &= c_1 x^{1/2} + c_2 x^{1/2} \ln x + \frac{4}{25} x^3 \quad (\text{integración por partes}) \end{aligned}$$

(c) La función de Green es dada por

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \frac{-y_1(x)y_2(s) + y_1(s)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \\ &= -x^{1/2}s^{1/2} \ln s + s^{1/2}x^{1/2} \ln x \\ &= (xs)^{1/2} \ln \frac{x}{s} \end{aligned}$$

(d) Si $\phi(s) = y(e^s)$ entonces usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \phi' &= y' e^s \\ \phi'' &= y'' e^{2s} + y' e^s = y'' e^{2s} + \phi' \end{aligned}$$

Se tiene $y'' = -\frac{1}{4x^2}y$ entonces reemplazando $x = e^s$

$$y''(e^s)e^{2s} = -\frac{e^{2s}}{4x^2}y(e^s) = -\frac{1}{4}\phi(s)$$

La función ϕ satisface entonces

$$\phi'' - \phi' + \frac{1}{4}\phi = 0$$

El conjunto fundamental de esta ecuación corresponde al conjunto fundamental de la ecuación dada en (a). Entonces se tiene con $x = e^s$

$$\begin{aligned} y_1(x) = x^{1/2} & \quad \text{corresponde a} \quad \phi_1(s) = e^{s/2} \\ y_2(x) = x^{1/2} \ln x & \quad \text{corresponde a} \quad \phi_2(s) = s e^{s/2} \end{aligned}$$

La solución general es dada por

$$\phi(s) = c_1 e^{s/2} + c_2 s e^{s/2}$$

3. (COREGIDO) Consideremos la ecuación

$$\mathcal{L}(y) = y'' + ay' + by = q(x) \tag{5}$$

con constantes a, b . Suponga que λ_1, λ_2 son raíces complejas distintas de $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ con $\lambda_1 = \mu + i\omega$ y $\lambda_2 = \mu - i\omega$ donde $\mu > 0$. Sea $q(x)$ la función continua y tal que

$$|q(x)| < k, -\infty < x < \infty$$

donde $k > 0$ es una constante.

- (a) Encuentre la solución general de (5).
- (b) Demuestre que cada solución de $\mathcal{L}(y) = q(x)$ es acotada para $x < 0$.
- (c) Si se tiene $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 0$ entonces cada solución satisface $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.

Solución. (a) El conjunto fundamental consiste de las funciones:

$$y_1(x) = e^{\mu x} \cos \omega x, \quad y_2(x) = e^{\mu x} \operatorname{sen} \omega x$$

El Wronskiano de y_1, y_2

$$W(e^{\mu x} \cos \omega x, e^{\mu x} \operatorname{sen} \omega x) = \omega e^{2\mu x}$$

entonces la función de Green tiene la forma

$$G(x, s) = \frac{e^{\mu(x-s)}(-\cos \omega x \operatorname{sen} \omega s + \cos \omega s \operatorname{sen} \omega x)}{\omega} = \frac{e^{\mu(x-s)}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(x-s)$$

Uno puede escribir la solución general como

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} \cos \omega x + c_2 e^{\mu x} \operatorname{sen} \omega x + \int_{x_0}^x \frac{e^{\mu(x-s)}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(x-s) q(s) ds \quad (6)$$

con x_0 arbitraria, fija.

- (b) Si $\mu > 0$ entonces la función

$$c_1 e^{\mu x} \cos \omega x + c_2 e^{\mu x} \operatorname{sen} \omega x$$

es acotada por $x < 0$. Basta verificar que

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x \frac{e^{\mu(x-s)}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(x-s) q(s) ds$$

es acotada por $x < x_0$ ($\phi(x)$ es obviamente acotada por $0 < x \leq x_0$ con fija x_0). Tenemos

$$\begin{aligned}
|\phi(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \frac{e^{\mu(x-s)}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(x-s) q(s) ds \right| \\
&\leq \int_x^{x_0} \left| \frac{e^{\mu(x-s)}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(x-s) q(s) \right| ds \\
&\leq \frac{k}{|\omega|} \int_x^{x_0} e^{\mu(x-s)} ds \\
&\leq \frac{k}{|\omega|\mu} (1 - e^{\mu(x-x_0)}) \leq M
\end{aligned} \tag{7}$$

con una constante M independiente de x .

(c) Elegimos $\epsilon > 0$ (pequeña) y x_0 tal que

$$|q(x)| \leq \epsilon, \quad x < x_0$$

Repetiendo el argumento (7) se tiene

$$|\phi(x)| \leq \frac{\epsilon}{|\omega|\mu} (1 - e^{\mu(x-x_0)}) \leq \frac{\epsilon}{|\omega|\mu} \quad x < x_0$$

pues $\mu > 0$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\phi(x)| \leq \frac{\epsilon}{|\omega|\mu}$$

y por lo tanto (ϵ es arbitraria pequeña)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\phi(x)| = 0$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [c_1 e^{\mu x} \cos \omega x + c_2 e^{\mu x} \operatorname{sen} \omega x] = 0$$

Usando la formula (6) se llega a la conclusión.