(b) Consideremos

$$(*1)\quad \begin{cases} y'' + p(x) f(y) = 0 , & x \in]a,b[\\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta . \end{cases} \quad , \; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; \mathcal{C}^1, \quad p :]a,b[\to \mathbb{R} \text{ continua.}$$

Demostrar que $(*1)$ tiene a lo más una sol. def. en $]a,b[$.

Sol:

Sean y_1, y_2 sols. de $(*1)$ defs. en $]a,b[$. Sea también $h \equiv y_2 - y_1$. Entonces

$$\begin{cases} h(x_0) = y_2(x_0) - y_1(x_0) = \alpha - \alpha = 0 \\ h'(x_0) = y_2'(x_0) - y_1'(x_0) = \beta - \beta = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} h''(x) &= y_2''(x) - y_1''(x) = p(x) f(y_2(x)) - p(x) f(y_1(x)) \\ &= p(x) \left(f(y_2(x)) - f(y_1(x)) \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y_1(x) = y_2(x) \qquad \left(= 0 \cdot (y_2(x) - y_1(x)) \right) \\ p(x) \left(f(y_2(x)) - f(y_1(x)) \right), & \text{si } y_2(x) \neq y_1(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Definamos pues

$$c(x) \equiv \begin{cases} f'(y_1(x))\, p(x) , & \text{si } y_1(x) = y_2(x) \\ p(x) \left\{ \dfrac{f(y_2(x)) - f(y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)} \right\} , & y_2(x) \neq y_1(x). \end{cases}$$

luego, la ec. para h queda como (recordemos que $h(x) = y_2(x) - y_1(x)$)

$$\begin{cases} h''(x) = c(x)\, h(x) & \text{(pues estamos haciendo un ni-quita-ni-pone)} \\ h(x_0) = h'(x_0) = 0 . \end{cases}$$

Este problema tiene solución única $h(x) \equiv 0$ (pues es una ec. lineal de 2° orden) siempre y cuando $c(x)$ sea continuo en $]a,b[$. Claramente $c(x)$ es continuo si $y_1(x) \neq y_2(x)$ por composición y algebra de fns. continuas, y si $y_2(x) \to y_1(x)$,

$$c(x) = p(x) \left\{ \frac{f(y_2(x)) - f(y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)} \right\} \to p(x) f'(y_1(x)) \quad , \text{ie}, \quad c(x) \text{ es continua } \forall x \in]a,b[.$$