CONTROL I MA 26A, 2006/1

Prof. M. del Pino, Prof. Aux. A. Contreras, C. Muñoz

Tiempo: 3 hrs.

(1) (a) Resuelva el problema de condición inicial

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 0,$$

especificando el intervalo maximal de existencia de la solución.

(b) Lo mismo que en la parte (a) para el problema

$$y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}, \quad y(0) = 0.$$

(c) Encuentre una expresión *implícita* para las soluciones de la ecuación

$$xy^4\, dx \; + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\, dy \; = 0 \; .$$

(2) (a) Calcule la solución general en el intervalo $(\sqrt{2}-1, \infty)$ de la ecuación

$$(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0,$$

encontrando primero una solución por inspección directa.

(b) Encuentre la solución general en el intervalo $(0, \pi)$ de la ecuación

$$4y'' + 36y = \frac{1}{\sin(3x)} \; .$$

(3) (a) Resuelva el problema de condición inicial

$$y'' = \frac{1}{2}e^y, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

encontrando el intervalo maximal de definición para su solución.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua, $p :]a, b[\to \mathbb{R}$ una función continua y $x_0 \in]a, b[$. Considere el problema de condiciones iniciales

$$y'' + p(x)f(y) = 0, \quad x \in]a, b[$$
$$y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; .$$

Demuestre que este problema tiene *a lo más* una solución definida en todo $]a, b[$. Para ello, suponga que y_1 e y_2 son soluciones y defina $h \equiv y_2 - y_1$. Muestre que

$$h'' + q(x)h = 0, \quad x \in]a, b[$$

donde $q(x)$ es una función *continua* en $]a, b[$.