(b) Encontrar la sol. gral en $(0,\pi)$ de $\quad (*2) \left\{ 4y'' + 36y = \dfrac{1}{\sin(3x)} \right\}$

Sol: Hay que resolver primero la ecuación homogénea: $4y'' + 36y = 0. \iff y'' + 9y = 0$
Como es a coeficientes constantes, basta buscar su polinomio característico:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 3i} \quad \text{(Distintos)}$$

Luego, la sol. homogénea es $\boxed{y_H(x) = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix} = \tilde{C}_1 \cos(3x) + \tilde{C}_2 \sin(3x)}$

Busquemos una sol. particular a $(*2)$. No podemos usar coeficientes indeterminadas pues $\dfrac{1}{\sin(3x)}$ no puede escribirse de la forma polinomio$(x) \cdot e^{\mu x}$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Usaremos pues <u>variación de parámetros</u>.

Sean $y_1(x) = \cos(3x)$, $y_2(x) = \sin(3x)$ conjunto fundamental. Calculemos su Wronskiano:

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -\sin(3x)\cdot 3 & \cos(3x)\cdot 3 \end{vmatrix} = 3\,\underbrace{(\cos^2(3x) + \sin^2(3x))}_{1} = 3 \neq 0.$$

Sea también $g(x) \equiv \dfrac{1}{4\sin(3x)}$. La solución particular viene dada por

$$\boxed{y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{g(x)\, y_2(x)}{W(y_1,y_2)}\, dx + y_2(x) \int \frac{g(x)\, y_1(x)}{W(y_1,y_2)}\, dx}$$

Pero,
$$\int \frac{g(x)\, y_2(x)}{W(y_1,y_2)}\, dx = \int \frac{1}{\cancel{\sin(3x)}} \cdot \frac{1}{3\cdot 4} \cancel{\sin(3x)}\, dx = \frac{1}{12} x \; ;$$

e
$$\int \frac{g(x)\, y_1(x)}{W(y_1,y_2)}\, dx = \int \frac{1}{\sin(3x)} \cdot \frac{\cos(3x)}{3\cdot 4}\, dx = \frac{1}{12} \int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{3}{3}\, dx$$
$$= \frac{1}{36} \ln(|\sin(3x)|)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = -\frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{1}{36} \sin(3x) \ln(|\sin(3x)|)}$$

$\Rightarrow$ la sol. gral es

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{12}\left\{ -x\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)\ln|\sin(3x)| \right.}$$