2)

(a) Calcular la sol. gral en $(\sqrt{2}-1,+\infty)$ de la ec.

$$(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0. \qquad (*1)$$

Sol: Encontremos una sol. por inspección (no nula para que sea l.i.):

Sea $y_1(x) = x+1$. Verifiquemos que y_1 satisface $(*1)$. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(x) = 1 \\ y_1''(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1-2x-x^2)y_1''(x) + 2(1+x)y_1'(x) - 2y_1(x) = 0 + 2(1+x)\cdot 1 - 2(1+x)$$

$$\equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \checkmark.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_1(x) = 1+x}$ Es sol. de $(*1)$.

Busquemos la otra sol. por reducción de orden:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)}}{y_1^2(x)}\,dx \quad , \text{ donde } p(x) = \frac{2(1+x)}{1-2x-x^2} = -\frac{2(x+1)}{(x+1)^2-2}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = (1+x)\int \frac{1}{(1+x)^2}\left(e^{+\int \frac{+2(1+x)}{(x+1)^2-2}dx}\right)dx$$

$$\text{Pero} \quad \int \frac{2(1+x)}{(x+1)^2-2}\,dx = \ln\left((x+1)^2-2\right) \Rightarrow$$

$$y_2(x) = (1+x)\int \frac{(x+1)^2-2}{(1+x)^2}\,dx = (1+x)x + (1+x)\int \frac{-2}{(1+x)^2}\,dx = x(1+x) + \frac{\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}}\cdot 2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_2(x) = x(1+x)+2}$

¿Son l.i.? En efecto,
$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & x(1+x)+2 \\ 1 & 2x+1 \end{vmatrix} = (2x+1)(1+x) - x(1+x) - 2$$

$$= (1+x)(x+1) - 2 = (x+1)^2 - 2$$

$W(y_1,y_2) \neq 0$ si $(x+1)^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x+1 > \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{x > \sqrt{2}-1}$ $(\Rightarrow x \in (\sqrt{2}-1,+\infty))$

Luego, $\{y_1,y_2\}$ es conjunto fundamental en $(\sqrt{2}-1,+\infty)$. La sol. gral. de $(*1)$ es pues

$$\boxed{y(x) = C_1(1+x) + C_2(x^2+x+2)} \qquad x \in (\sqrt{2}-1,+\infty)$$