PAUTA C1 MA2GA. P. MANUEL DEL PINO.

P1 (a) Resolver $(*) \begin{cases} xy' - y = \sqrt{x^2+y^2} \\ y(1)=0 \end{cases}$, especificando intervalo maximal.

Sol: Notemos que es una ec. homogénea: dividiendo por x,

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Haciendo el c.v. $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, se tiene que $y' = z + xz'$, y por ende $(*)$ se convierte en

$$\cancel{z} + xz' = \cancel{z} + \sqrt{1+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{x} \qquad \text{(ec. a variables separables)}$$

Luego,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \ln|x| + C.$$

Para resolver la integral de la izquierda, podemos por ejemplo usar el c.v. $z = \sinh u$ (pues $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$). Luego, $dz = \cosh u \, du$ y $\sqrt{1+z^2} = \cosh u$

De aquí,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\cosh u \, du}{\cosh u} = u = \operatorname{arcsinh} z$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = \sinh(\ln|x| + C) = \frac{1}{2}\left\{ e^{\ln|x|+C} - e^{-\ln|x|-C} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ e^C |x| - \frac{e^{-C}}{|x|} \right\}$$

Luego, $y(x) = x z(x) = \frac{1}{2}\left\{ e^C x|x| - e^{-C}\frac{x}{|x|} \right\}$

Debemos utilizar la c.i. $y(1)=0$, de aquí

$$y(1) = 0 = \frac{1}{2}\left\{ e^C - e^{-C} \right\} \Rightarrow 0 = \sinh C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}\left\{ x|x| - \frac{x}{|x|} \right\} = \frac{1}{2}x\left\{ \frac{|x|^2 - 1}{|x|} \right\} = \frac{1}{2}x\left\{ \frac{x^2-1}{|x|} \right\}$$

Luego, como $1>0$ resolvemos para $x>0$: $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)}$ $\boxed{I = \mathbb{R}}$ ($y(x)$ es suave en todo $\mathbb{R}$)

Es claro que la solución para $x<0$ $y(x) = -\frac{1}{2}(x^2-1)$ no satisface la ecuación $(*)$. (verificarlo).

b) lo mismo que (a) pero para $(**) \begin{cases} y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3} \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Sol: Esta ec. no es a variables separables, pero si hacemos el c.v. $u(x) \equiv y(x) - 2x + 3$, entonces

$$u' = y' - 2 \Rightarrow y' = u' + \cancel{2} \underset{\text{por } (**)}{=} \cancel{2} + \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad (*1) \begin{cases} u' = \sqrt{u} \\ u(0) = \underbrace{y(0)}_{0} - 2\cdot 0 + 3 = 3 \end{cases}$$

Resolver $(*1)$ es fácil: es una ec. a variables separables: $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = \int 1$

(continúa...)