PAUTA C1 MA26A Prof. M. DEL PINO.

P3) (a) Resolver el P.V.I. $y'' = \frac{1}{2}e^{y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Encuentre intervalo maximal de la solución.

Sol: Multipliquemos la ec por y':

(1) $y''y' = \frac{1}{2}e^{y}y'$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Pero $y''y' = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}y'^2(x)\right\}$ y $e^{y}y' = \frac{d}{dx}\left\{e^{y(x)}\right\}$, luego (1) se convierte en

$\frac{1}{2}y'^2(x) = \frac{1}{2}e^{y(x)} + cte$; pero $y(0)=0$ e $y'(0)=1$, luego $\boxed{cte = 0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y'^2(x) = e^{y(x)}}$ (2) $e^{y(x)} \geq 0$ luego esta ecuación tiene sentido.

Tomando raíz, $y'(x) = \pm e^{y(x)/2}$ ← Dos ecuaciones a variables separables.

De aquí, $\int \frac{dy}{e^{y/2}} = \pm\int dx = \pm x + C.$

luego, $-2e^{-\frac{y(x)}{2}} = \pm x + C$; pero $y(0)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{C=-2}$

$\Rightarrow$ $-\frac{y(x)}{2} = \ln\left(1 \mp \frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_{\pm}(x) = -2\ln\left(1 \mp \frac{x}{2}\right)}$ (3) (Dos soluciones)

Ambas cumplen $y_{\pm}(0)=0$, pero

$y'_{+}(x) = +\frac{1}{1-x/2}$ $\Rightarrow$ $y'_{+}(0) = +1$ ← Sí nos sirve!

Mientras $y'_{-}(x) = \frac{-1}{1+x/2}$ $\Rightarrow$ $y'_{-}(0) = -1$ ← No nos sirve!

Conclusión:

$\boxed{y(x) = -2\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}$ es sol. e $\boxed{I_{max} = (-\infty, 2) \ni 0}$