EJERCICIOS DE EDO, CURSO 06/07)

1. Ecuaciones de primer orden

1.1. Separables y reducibles a separables

1) Inicialmente hay s_0 kilos de sal disueltos en el agua de un depósito de V litros. En $t = 0$ se empieza a verter en el depósito una solución de agua salada de c gramos por litro a razón de v litros por minuto. Al mismo tiempo, un grifo libera también 6 litros por minuto de la mezcla, supuesta homogénea en todo tiempo. Halle la ecuación diferencial que verifica la cantidad de sal $s(t)$ en el depósito. Mediante integración simple obtenga $s(t)$ en el caso en que $v = 6$.

2) Un tanque tiene forma de cono circular recto invertido, con el vértice en la parte inferior, de radio y altura 3 y 6 m respectivamente. El tanque contiene agua que se evapora parcialmente durante 30 días de modo que el nivel baja de 6 a 3 m de profundidad. Sabiendo que la velocidad de evaporación es proporcional a la superficie de evaporación, averigue el tiempo que ha de transcurrir para que la profundiad sea de 1 m.

3) Un día empezó a nevar de forma constante. Al mediodía un quitanieves empezó a limpiar una carretera a un ritmo constante, en términos de volumen de nieve retirado cada hora. El quitanieves avanzó dos kilómetros la primera hora y uno la segunda. ¿A qué hora empezó a nevar?

4) Supóngase que x_0 bacterias se ponen en una solución nutritiva en el tiempo $t = 0$ y que $x(t)$ es la población de la colonia en un momento posterior t. Si los alimentos y el espacio vital son ilimitados y si, como consecuencia de ellos, la población, en cualquier momento, aumenta con un índice proporcional a la población en ese momento, encuentre x en función de t.

5) Resuelva cada una de las ecuaciones:

   a) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x+6$ — Sol: $y = x + 5\log|1+x| + C$

   b) $\left(4y + yx^2\right)\mathrm{d}y - \left(2x + xy^2\right)\mathrm{d}x = 0$ — Sol: $y = \pm\sqrt{-2 + 4\mathrm{e}^{2C} + \mathrm{e}^{2C}x^2}$

   c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$ — Sol: $y = \dfrac{-7 - 8x - 60C - 48Cx}{2\left(-1 + 20C + 16Cx\right)}$

   d) $\left(x^2 - 2y^2\right)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$ — Sol: $y = \pm\sqrt{x^2 + Cx^4}$

   e) $(6x + 4y - 8)\,\mathrm{d}x + (x + y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ — Sol: $2x + y - 3 = C\left(3x + y - 5\right)^2$

   f) $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ — Sol: $2\left(x+y\right) + 3\log|2 - (x+y)| = x + C$

1.2. Exactas y reducibles a exactas

6) Compruebe si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas. En caso de serlo, resuélvalas.

a) $(2x-1)\mathrm{d}x+(3y+7)\mathrm{d}y=0$ Sol: $-x+x^2+7y+\dfrac{3y^2}{2}=C$

b) $(2x+y)\mathrm{d}x-(x+6y)\mathrm{d}y=0$

c) $(5x+4y)\mathrm{d}x+(4x-8y^3)\mathrm{d}y=0$ Sol: $\dfrac{5x^2}{2}+4xy-2y^4=C$

d) $(\operatorname{sen} y-y\operatorname{sen} x)\mathrm{d}x+(\cos x+x\cos y-y)\mathrm{d}y=0$ Sol: $-\dfrac{y^2}{2}+y\cos x+x\operatorname{sen} y=C$

e) $(2y^2x-3)\mathrm{d}x+(2yx^2+4)\mathrm{d}y=0$ Sol: $-3x+4y+x^2y^2=C$

f) $\left(2y-\dfrac{1}{x}+\cos 3x\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen} 3x$

g) $(x+y)(x-y)\mathrm{d}x+x(x-2y)\mathrm{d}y=0$

h) $\left(1+\log x+\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x=(1-\log x)\mathrm{d}y$ Sol: $-y+x\log x+y\log x=C$

i) $\left(y^3-y^2\operatorname{sen} x-x\right)\mathrm{d}x+\left(3xy^2+2y\cos x\right)\mathrm{d}y=0$ Sol: $-\dfrac{x^2}{2}+xy^3+y^2\cos x=C$

j) $\left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}x+\left(3xy^2\right)\mathrm{d}y=0$ Sol: $\dfrac{x^4}{4}+xy^3=C$

k) $\left(x^2y^3-\dfrac{1}{1+9x^2}\right)\mathrm{d}x+x^3y^2\mathrm{d}y=0$ Sol: $\dfrac{x^3y^3}{3}-\dfrac{1}{3}\arctan 3x=C$

7) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones hallando un factor integrante:

a) $\left(3x^2-y^2\right)\mathrm{d}y-2xy\mathrm{d}x=0$ Sol: $\mu=\dfrac{1}{y^4},\ x^2-y^2=Cy^3$

b) $(xy-1)\mathrm{d}x+\left(x^2-xy\right)\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\dfrac{1}{x},\ 2xy-\log x^2-y^2=C$

c) $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+3x^3y^4\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\dfrac{1}{(xy)^3},\ 3x^2y^4=1+Cx^2y^2$

d) $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cot y+2y\operatorname{cosec} y)\,\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\operatorname{sen} y,\ \mathrm{e}^x\operatorname{sen} y+y^2=C$

e) $(x+2)\operatorname{sen} y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=x\,\mathrm{e}^x, x^2\,\mathrm{e}^x\operatorname{sen} y=C$

f) $y\,\mathrm{d}x+\left(x-2x^2y^3\right)\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\dfrac{1}{(xy)^2}, 1+xy^3=Cxy$

g) $\left(x+3y^3\right)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=x^2,\ 4x^3y^2+x^4=C$

h) $y\mathrm{d}x+(2x-y\,\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=y,\ xy^2-\mathrm{e}^y\left(x^2-2y+2\right)=C$

i) $(y\log y-2xy)\,\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\dfrac{1}{y},\ x\log y-x^2+y=C$

j) $\left(y^2+xy+1\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+xy+1\right)\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\mathrm{e}^{xy},\ \mathrm{e}^{xy}(x+y)=C$

k) $\left(x^3+xy^3\right)\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y=0$ Sol: $\mu=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(y^3+x^2-2\right)=C$

8) Utilizando las siguientes fórmulas diferenciales

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} \qquad \mathrm{d}(xy) = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\left(x^2+y^2\right) = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \qquad \mathrm{d}\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy}$$

resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \left(1+y^2\right)\mathrm{d}y$ Sol: $-\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + C$

b) $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = xy^3\mathrm{d}y$ Sol: $\log\frac{x}{y} = \frac{y^3}{3} + C$

c) $x\mathrm{d}y = \left(x^5 + x^3y^2 + y\right)\mathrm{d}x$ Sol: $\arctan\frac{x}{y} = -\frac{x^4}{4} + C$

d) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \sqrt{xy}\mathrm{d}y$ Sol: $2\sqrt{xy} = y + C$

e) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = x^2y^4\left(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x\right)$ Sol: $3x + x^3y^4 + Cy = 0$

f) $\mathrm{d}y + \frac{y}{x}\mathrm{d}x = \operatorname{sen}x\mathrm{d}x$ Sol: $xy + x\cos x = \operatorname{sen}x + C$

1.3. Lineales

9) Resuelva las ecuaciones lineales:

a) $y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ Sol: $y = \mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^{x} + C\,\mathrm{e}^{-x}$

b) $y' + y\cot x = 2x\operatorname{cosec}x$ Sol: $y = x^2\operatorname{cosec}x + C\operatorname{cosec}x$

c) $\left(2y - x^3\right)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$ Sol: $y = -x^3 + Cx^2$

d) $y - x + xy\cot y + xy' = 0$ Sol: $xy\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x - x\cos + C$

e) $y' - 2xy = 6x\,\mathrm{e}^{x^2}$ Sol: $y = 3x\,\mathrm{e}^{x^2} + C\,\mathrm{e}^{x^2}$

f) $y'x\log x + y = 3x^3$ Sol: $y = \frac{x^3+C}{\log x}$

g) $\left(y - 2xy - x^2\right)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$ Sol: $y = x^2\left(1 + C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$

10) Un depósito de 500 m^3 de capacidad contiene 100 m^3 de agua pura. A partir del instante $t = 0$ entra en el depósito una disolución de alcohol en agua al 50 % a razón de 2 m^3 por minuto, y sale la disolución, supuesta homogénea, a razón de 1 m^3 por minuto. Calcule la concentración de alcohol en la disolución del depósito en el instante en que rebose éste.

1.4. Reducibles de orden

11) Resuelva las siguientes ecuaciones reduciendo el orden:

   a) $yy'' + (y')^2 = 0$ Sol: $y^2 = C_1 x + C_2$
   b) $xy'' = y' + (y')^3$ Sol: $x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2$
   c) $y'' - k^2 y = 0$ Sol: $y = C_1\,\mathrm{e}^{kx} + C_2\,\mathrm{e}^{-kx}$
   d) $x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$ Sol: $-\dfrac{x^2}{2} - C_1 x - C_1^2 \log(x - C_1) + C_2$

12) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

   a) $\left(x^2 + 2y'\right) y'' + 2xy' = 0,\ y'(0) = 1, y'(0) = 0$ Sol: $y = 1$ ó $3y + x^3 = 3$
   b) $yy'' = y^2 y' + (y')^2,\ y(0) = -\dfrac{1}{2}, y'(0) = 1$ Sol: $2y - 3 = 8y\,\mathrm{e}^{3x/2}$
   c) $y'' = y'\,\mathrm{e}^y,\ y(0) = 0, y'(0) = 2$ Sol: $y = -\log(2\,\mathrm{e}^{-x} - 1)$

1.5. Trayectorias ortogonales

13) Dibuje un esbozo de las siguientes familias uniparamétricas de curvas, halle sus trayectorias ortogonales y añádalas al gráfico:

   a) $xy = c$ Sol: $x^2 - y^2 = c$
   b) $y = cx^2$ Sol: $x^2 + 2y^2 = c^2$
   c) $r = c\,(1 + \cos\theta)$ Sol: $r = c\,(1 - \cos\theta)$
   d) $y = c\,\mathrm{e}^x$ Sol: $y^2 = -2x + c$

14) ¿Cuáles son las trayectorias ortogonales de la familia de cuarvas (a) $y = cx^4$; (b) $y = cx^n$, donde n es cualquier entero positivo? Dibuje las familias de curvas. ¿Qě efecto tiene sobre las trayectorias ortogonales el aumentar n? Sol: (a) $x^2 + 4y^2 = c^2$, (b) $x^2 + ny^2 = c^2$

15) Una silla de montar que tiene la forma de la superficie $z = y^2 - x^2$ está a la intemperie, bajo la lluvia. Halle las trayectorias que seguirán las gotas de agua que caen por ella. Esboze un gráfico para convencerse de que la respuesta es razonable.
(Sol: Las intersecciones de los cilindros $xy = c$, con la "silla de montar"$z = y^2 - x^2$)

2. Ecuaciones de orden superior

2.1. Uso de una solución conocida para hallar otra

16) Halle y_2, y la solución general, a partir de la solución y_1 dada:

   a) $y'' + y = 0,\ y_1 = \operatorname{sen} x$ Sol: $y_2 = -\cos x,\ y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$

   b) $y'' - y = 0,\ y_1 = \mathrm{e}^x$ Sol: $y_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x},\ y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-x}$

   c) $xy'' + 3y' = 0,\ y_1 = 1$ Sol: $y_2 = -\frac{1}{2}x^{-2},\ y = c_1 + c_2 x^{-2}$

   d) $x^2y'' + xy' - 4y = 0,\ y_1 = x^2$ Sol: $y_2 = -\frac{1}{4}x^{-2},\ y = c_1x^2 + c_2x^{-2}$

17) Aprovechando que $y_1 = x$ es solución de cada una de las ecuaciones que se indican a continuación, halle su solución general:

   a) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0$ Sol: $y = c_1x + c_2\,\mathrm{e}^x$

   b) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ Sol: $y = c_1x + c_2x^{-2}$

   c) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ Sol: $y = c_1x + c_2x\,\mathrm{e}^x$

18) Compruebe que $y_1 = \mathrm{e}^x$ es solución de $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ y halle su solución general. Sol: $y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2x^2\,\mathrm{e}^x$

2.2. Método de variación de parámetros

19) Halle la solución general de cda una de las siguientes ecuaciones:

   a) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$ Sol: $y = c_1x + c_2\left(x^2+1\right) + \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2$

   b) $y''\left(x^2+x\right) + \left(2-x^2\right)y' - (2+x)y = x(x+1)^2$ Sol: $y = c_1\,\mathrm{e}^x + \dfrac{c_2}{x} - x - 1 - \dfrac{1}{3}x^2$

   c) $(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$ Sol: $y = c_1x + c_2\,\mathrm{e}^x + x^2 + 1$

   d) $xy'' - (1+x)y' + y = x^2\,\mathrm{e}^{2x}$ Sol: $y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2(x+1) + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x-1)$

   e) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x\,\mathrm{e}^{-x}$ Sol: $y = c_1x + c_2x^2 - x\,\mathrm{e}^{-x} - (x^2+x)\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$

20) Pruebe que el método de variación de parámetros aplicado a la ecuación $y'' + y = f(x)$ conduce a la solución particular

$$y_p(x) = \int_0^x f(t)\operatorname{sen}(x-t)\mathrm{d}t.$$

Hallar una formula similar para una solución particular de la ecuación $y'' + k^2y = f(x)$, donde k es una constante positiva.

Solución: $y_p = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^x f(t)\operatorname{sen} k(x-t)\mathrm{d}t$

21) Halle una solución particular de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + 4y = \tan 2x$ Sol: $y_p = -\dfrac{1}{4}\cos 2s \log(\sec 2x + \tan 2x)$

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\log x$ Sol: $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x}\log x - \dfrac{3}{4}x^2 e^{-x}$

c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$ Sol: $y = \dfrac{1}{2}x\, e^{-x}\operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{4}e^{-x}\cos 2x \log(\cos 2x)$

d) $2y'' + 3y' + y = e^{-3x}$ Sol: $y = \dfrac{1}{10}e^{-3x}$

e) $y'' + y = \cot^2 x$ Sol: $y = \cos x \log(\operatorname{cosec} x + \cot x) - 2$

f) $y'' + y = \cot 2x$ Sol: $y = \dfrac{1}{2}\cos x \log(\sec x + \tan x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x \log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$

g) $y'' + y = \sec x \operatorname{cosec} x$ Sol: $y = -\operatorname{sen} x \log(\operatorname{cosec} x + \cot x) - \cos x \log(\sec x + \tan x)$

2.3. Método de los coeficientes indeterminados

22) Halle la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + 3y' - 10y = 6\, e^{4x}$ Sol: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} + \dfrac{1}{3}e^{4x}$

b) $y'' + 10y' + 25y = 14\, e^{-5x}$ $y = c_1 e^{-5x} + c_2 x\, e^{-5x} + 7x^2 e^{-5x}$

c) $y'' - 3y' + 2y = 14 \operatorname{sen} 2x - 18\cos 2x$ $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 2\operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x$

d) $y'' + y = 2\cos x$ $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x$

e) $y'' - 2y' + y = 6\, e^{x}$ $y = c_1 e^{x} + c_2 x\, e^{x} + 3x^2 e^{x}$

f) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\operatorname{sen} x$ $y = e^{x}(c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x) - \dfrac{1}{2}x\, e^{x}\cos x$

g) $y'' + y' = 10x^4 + 2$ $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 120x^2 + 242x$

23) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x + 8x^2 - 4x$

Sol: $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + x\operatorname{sen} 2x + 2\cos x - 1 - x + 2x^2$

b) $y'' + 9y = 2\operatorname{sen} 3x + 4\operatorname{sen} x - 26\, e^{-2x} + 27x^3$

Sol: $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2\cos 3x - \dfrac{1}{3}x\cos 3x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x - 2\, e^{-2x} + 3x^3 - 2x$

24) Resuelva la siguiente ecuación por el método oportuno

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2x\, e^{-x}$ Sol: $c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \dfrac{1}{12}x\, e^{-x} - \dfrac{12}{144}e^{-x}$