**Auxiliar 5 - MA2A1**
**16 abril 2008**

Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Victor Carmi y Cristopher Hermosilla

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que sus derivadas parciales satisfacen lo siguiente:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\right| \leq K \quad \forall i \in 1, 2, ..., n \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

pruebe que $|f(\vec{x} - \vec{y})| \leq \sqrt{n}K \, \|\vec{x} - \vec{y}\|$

2. *a*) Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $u(x,t)$ cumple la siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

$x = f(t)$ que satisface $\frac{\partial x}{\partial t} = x(x,t)$, con $f$ una función derivable.
pruebe que $g(t) = u(f(t), t)$ constante en t.

*b*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Longleftrightarrow \exists g \text{ diferenciable tal que } f(x,y) = g(x-y)$$

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(u,v) = f(uv, \frac{u^2-v^2}{2})$ donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Pruebe que $F$ verifica la siguiente ecuación:

$$(\frac{\partial F}{\partial u})^2 + (\frac{\partial F}{\partial v})^2 = (u^2+v^2)((\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2)$$

4. *a*) La altura de un cono recto circular mide $h_o$, y aumenta a una razón fija de $\boldsymbol{a}$ por unidad de tiempo. El radio de la base mide $r_o$ y aumenta a una razón fija de $\boldsymbol{b}$. Hallar la variación de volumen del cono, que experimenta en una unidad de tiempo.

*b*) Suponga ahora que $r = r(t)$ y $h = h(r(t))$ encuentre $h(r)$ para el cual no hay variación de volumen.