MA2A1 Enunciado clase auxiliar 16 de abril

Prof. Michal Kowalczyk
Prof. Aux.: Guillermo Campos y Darío Valdebenito

13 de abril de 2008

Problema 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas y que satisface

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq K$$

para todo $x = (x_1, ..., x_n)$, $j = 1, ..., n$. Demuestre que si $\| \cdot \|$ es la norma euclidiana, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} K \|x - y\|$$

Problema 2

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ y considere el operador *laplaciano* definido por

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

y las coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.

1. Pruebe que en coordenadas polares
$$\triangle f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

2. Sea $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x\cos\sqrt{x^2 + y^2}$. Usando el resultado anterior, determine $\triangle f$.

Problema 3

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Sean $a, b \in D$ tales que $[a, b] := \{x : x = t \cdot a + (1 - t)b,\ 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D$. Pruebe que entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in [a,b] \setminus \{a,b\}} \|Df(c)\| \|b - a\|$$

con la norma matricial de Frobenius. Este resultado se conoce como el *teorema de los incrementos finitos*.

Problema 4

1. Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Usando el teorema del valor medio para funciones reales, pruebe que existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $\|f(t)\|$ es una función creciente de t en $(0, \varepsilon)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ cuyas derivadas parciales son uniformemente acotadas, i.e.
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) \right| \leq M$$
para todo $x = (x_1, ..., x_n)$, $j = 1, ..., n$ y para todo $(x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0)$. Demuestre que si $n \geq 2$, entonces f se puede extender a una función continua definida en todo $\mathbb{R}^n$. Muestre mediante un contraejemplo que el resultado anterior es falso cuando $n = 1$.