PAUTA EXAMEN MA 2A1, 2008/1

Pregunta 1.
(a) Determinar el volumen de la región limitada por la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=a^2$ y los planos $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ y que está dentro de $x\geq 0$, $y\geq 0$.

(b) Calcular

$$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

donde E es la intersección del disco $(x-a)^2+y^2\leq a^2$ donde $a>0$ y la región $|y|\leq x$.

Solución.
(a) En coordenadas esféricas ($x=r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z=r\cos(\theta)$)podemos describir la región como

$$0\leq r\leq a,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$$

ya que el semiplano $y=\sqrt{3}x$, $x\geq 0$ corresponde a $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Luego

$$\begin{aligned}V &= \int_0^a\int_0^\pi\int_{\pi/4}^{\pi/3} r^2\sin(\theta)d\varphi d\theta dr\\ &= \frac{\pi}{12}\int_0^a\int_0^\pi r^2\sin(\theta)d\theta dr\\ &= \frac{\pi}{6}\int_0^a r^2dr=\frac{\pi}{18}a^3\end{aligned}$$

(suponiendo $a>0$)

(b) La ecuación $(x-a)^2+y^2=a^2$ es equivalente a

$$x^2+y^2=2ax.$$

Usando coordenadas polares podemos reescribirla como $r^2=2ar\cos(\theta)$. Luego la región de integración podemos describirla en coordenadas polares como

$$-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4},\quad 0\leq r\leq 2a\cos(\theta).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\iint_E\sqrt{x^2+y^2}\,dA &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{2a\cos(\theta)} r^2drd\theta\\ &= \frac{8}{3}a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(\theta)^3d\theta\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u=\sin(\theta)$

$$\begin{aligned}\int\cos(\theta)^3d\theta &= \int(1-\sin(\theta)^2)\cos(\theta)d\theta=\int(1-u^2)du\\ &= u-\frac{1}{3}u^3+C=\sin(\theta)-\frac{1}{3}\sin(\theta)^3+C.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dA &= \frac{8}{3}a^3\left[\sin(\theta)-\frac{1}{3}\sin(\theta)^3\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}\\ &= \frac{8}{3}a^3\left[\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right]=\frac{20\sqrt{2}}{9}a^3.\end{aligned}$$

Pregunta 2.
Dada una función u de clase C^2 en un abierto de $\mathbb{R}^N$ se define

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

(a) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región abierta y acotada y u una función continua en $\bar{D}$ y de clase C^2 en D. Se pide probar que si

$$\Delta u - u = 0 \quad \text{en } D$$

y $u \geq 0$ en ∂D entonces $u \geq 0$ en D.
Indicación: si la conclusión no es cierta $\min_{\bar{D}} u < 0$. Note que Δu es la traza de u'' y que la traza de una matriz es la suma de sus valores propios.

(b) Sea $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y definamos $u(x,y) = v(\sqrt{x^2+y^2})$, es decir, $u(x,y) = v(r)$ con $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Pruebe que

$$\Delta u(x,y) = v''(r) + \frac{1}{r}v'(r).$$

Use esta fórmula para encontrar una función u de clase C^2 tal que

$$\begin{aligned}&\Delta u = 0 \quad \text{en } D\\ &u(x,y) = 0 \quad \text{si } x^2+y^2=1\\ &u(x,y) = 1 \quad \text{si } x^2+y^2=4\end{aligned}$$

donde $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

Solución.
(a) Supongamos que $\min_{\bar{D}} u < 0$. Como $\bar{D}$ es cerrado y acotado el mıńimo se alcanza, digamos en $(x_0,y_0) \in \bar{D}$, es decir

$$u(x_0,y_0) = \min_{\bar{D}} u < 0$$

Como $u \geq 0$ en la frontera necesariamente (x_0,y_0) está en el interior, es decir en D. Luego $\nabla u(x_0,y_0) = 0$ y $u''(x_0,y_0)$ es semidefinida positiva. Como es semidefinida positiva, sus valores propios λ_1,λ_2 cumplen $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Pero entonces

$$\Delta u(x_0,y_0) = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0.$$

Por otro lado, de la hipótesis

$$\Delta u(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) < 0.$$

Esta contradicción prueba que $\min_{\bar{D}} u \geq 0$.

(b) Primero veamos que se cumple la fórmula. Como $u(x,y) = v(r)$ con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ calculamos usando la regla de la cadena

$$u_x = v' r_x$$

pero

$$r_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

As

$$u_x = v' \frac{x}{r}$$

Derivamos nuevamente

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v'' \frac{x^2}{r^2} + v' \frac{1}{r} - v' \frac{x}{r^2} r_x \\ &= v'' \frac{x^2}{r^2} + v' \frac{1}{r} - v' \frac{x^2}{r^3} \end{aligned}$$

Similarmente

$$u_{yy} = v'' \frac{y^2}{r^2} + v' \frac{1}{r} - v' \frac{y^2}{r^3}$$

Luego

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v'' \frac{x^2+y^2}{r^2} + v' \frac{2}{r} - v' \frac{x^2+y^2}{r^3} \\ = v'' + \frac{1}{r} v' \end{aligned}$$

Luego el problema se transforma en encontrar v tal que

$$v'' + \frac{1}{r} v' = 0$$

y $v(1) = 0$, $v(2) = 1$. Introducimos $w(r) = v'(r)$ y tenemos la ecuación diferencial

$$w' + \frac{1}{r} w = 0$$

que se puede resolver separando variables.

$$\log(w) = -\log(r) + C$$

donde C es una constante de integración. Es decir

$$v'(r) = \frac{A}{r}$$

donde A es una constante. Integrando

$$v(r) = A \log(r) + B$$

Pero $v(1) = 0$ lo que implica que $B = 0$. Imponiendo $v(2) = 1$ encontramos $A \log(2) = 1$. Luego

$$v(r) = \frac{\log(r)}{\log(2)}$$

es decir

$$u(x,y) = \frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})}{\log(2)}$$

Pregunta 3.
(a) Calcule el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está por debajo de $z = 1$.

(b) Determine los máximos y mínimos de

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$$

en la región $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1$.
Indicación: Busque puntos críticos en el interior y calcule el máximo y mínimo sobre el borde.

Solución.
(a) La superficie se puede parametrizar, usando coordenadas cilíndricas, como

$$\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2), \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\phi_r &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 2r)\\ \phi_\theta &= (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0)\end{aligned}$$

Notamos que estos vectores son perpendiculares, luego

$$\|\phi_r \times \phi_\theta\| = \|\phi_r\|\|\phi_\theta\| = (1+4r^2)^{1/2} r$$

Luego el área es

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|\phi_r \times \phi_\theta\| d\theta dr\\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+4r^2)^{1/2} r d\theta dr\\ &= \frac{\pi}{6}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

(b)
La región D de los puntos que satisfacen $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8} \le 1$ es cerrada y acotada y la función f es continua, por lo que alcanza su máximo y su mínimo sobre D. Luego buscamos primero puntos críticos en en interior. Para esto calculamos

$$\nabla f = (4x - y, 2y - x, 2z)$$

Resolvemos $\nabla f = 0$ y encontramos $z = 0$, $4x = y$, $2y = x$. Las últimas dos ecuaciones implican $x = y = 0$. Luego el único punto crítico de f es $(0,0,0)$ y

$$f(0,0,0) = 0.$$

Buscamos ahora el máximo y mínimo de f sobre el borde de D, definido por la ecuación $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8} = 1$, para lo cual usamos multiplicadores de Lagrange. Definimos $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}-1) = 2x^2+y^2+z^2-xy-\lambda(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}-1)$. Calculamos

$$L_x = 4x - y - \lambda x \tag{1}$$

$$L_y = 2y - x - \frac{\lambda}{2} y \tag{2}$$

$$L_z = 2z - \frac{\lambda}{4} z \tag{3}$$

$$L_\lambda = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8} - 1 \tag{4}$$

Entonces $(8-\lambda)z = 0$. Si $\lambda = 8$ reemplazamos en las 2 primeras ecuaciones y encontramos $x = y = 0$. Luego de la restricción $z = \pm\sqrt{8}$ y

$$f(0, 0 \pm \sqrt{8}) = 8.$$

El otro caso es $z = 0$. De (1) y (2) si $x = 0$ entonces $y = 0$, lo que no es posible. Luego $x \ne 0$ y similarmente $y \ne 0$. De (1) y (2)

$$4 - \frac{y}{x} = \lambda = 4 - 2\frac{x}{y}$$

lo que implica $x^2 = 2y^2$. Reemplazando en la restricción $x = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{2}$. Encontramos entonces 4 candidatos

$$\begin{aligned} f(1, \sqrt{2}, 0) &= 4 - \sqrt{2} \\ f(1, -\sqrt{2}, 0) &= 4 + \sqrt{2} \\ f(-1, \sqrt{2}, 0) &= 4 + \sqrt{2} \\ f(-1, -\sqrt{2}, 0) &= 4 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Como $4-\sqrt{2} > 0$ y $4+\sqrt{2} < 8$ vemos que el máximo es 8 y se alcanza en $(0, 0 \pm \sqrt{8})$ y el mínimo es 0 y se alcanza en $(0, 0, 0)$.