Resolución P3 y P4(1) de la última clase auxiliar

Prof. Michal Kowalczyk
Prof. Aux.: Guillermo Campos y Darío Valdebenito

18 de abril de 2008

Problema 3

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Sean $a, b \in D$ tales que $[a,b] := \{x : x = t \cdot a + (1-t)b,\ 0 \le t \le 1\} \subseteq D$. Pruebe que entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \le \sup_{c \in [a,b] \setminus \{a,b\}} \|Df(c)\| \|b-a\|$$

con la norma matricial de Frobenius. Este resultado se conoce como el *teorema de los incrementos finitos*.

Solución En primer lugar, si $A = (a_{ij})_{ij}$, entonces la norma de Frobenius es la más natural para estos efectos:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij})^2}$$

Hecha esta aclaración, prosigamos con la demostración.

Sea $w \in \mathbb{R}^m$ y

$$g(t) = \langle w, f\left((1-t)\,a + tb\right)\rangle$$

Claramente $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ y

$$g\,(0) = w^t f\,(a)\,, \quad g\,(1) = w^t f\,(b)$$

$$\Rightarrow g\,(1) - g\,(0) = \langle w, f\,(b) - f\,(a)\rangle$$

Definamos ahora

$$w = \begin{cases} \frac{f(b)-f(a)}{\|f(b)-f(a)\|} & \text{si } f\,(a) \neq f\,(b) \\ 0 & \text{si } f\,(a) = f\,(b) \end{cases}$$

Entonces

$$g'\,(t) = \langle w, Df\left((1-t)\,a + tb\right)(b-a)\rangle$$

Así, aplicamos el teorema del valor medio a $g\,(t)$, resultando

$$\begin{aligned} \|g\,(1) - g\,(0)\,\| &= \|f\,(b) - f\,(a)\,\| \\ &= \langle w, Df\,(c)\,(b-a)\rangle\,\|1-0\|,\ c \in [a,b] \\ \text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\le \|w\|\|Df\,(c)\,(b-a)\,\| \\ &\le \|Df\,(c)\,(b-a)\,\| \\ &\le \|Df\,(c)\,\|\|b-a\| \\ &\le \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df\,(c)\,\| \end{aligned}$$

Problema 4

1. Sea $f : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Usando el teorema del valor medio para funciones reales, pruebe que existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $\|f(t)\|$ es una función creciente de t en $(0, \varepsilon)$.

Solución Sea $f = (f_1, f_2)$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \\ &= 2f_1 f_1'(t) + 2f_2 f_2'(t)\end{aligned}$$

Si $t > 0$,

$$= 2t\left[f_1'(\xi_1) f_1'(t) + f_2'(\xi_2) f_2'(t)\right]$$

con $0 < \xi_1 < t$, $0 < \xi_2 < t$. Cuando $t \searrow 0$[1] y como f es de clase $\mathcal{C}^1$,

$$f_1'(\xi_1) f_1'(t) + f_2'(\xi_2) f_2'(t) \to \|f'(0)\|^2 > 0$$

$$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall t \in [0, \varepsilon])\, \frac{d}{dt}\|f'(t)\| > 0$$

[1] i.e. $t \to 0$ en forma decreciente, y siempre $t \neq 0$