Partes faltantes clase auxiliar 2 de abril

Prof. Michal Kowalczyk
Prof. Aux.: Guillermo Campos y Darío Valdebenito

2 de abril de 2008

Límite pendiente

El propósito es probar que

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}$$

no existe. En efecto, supongamos que $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|} = L$. Como $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{|x|} = 0$, al tomar límite es necesario que el límite de cada término exista para que exista el límite general (noten que si el segundo término diverge o no tiene límite, entonces el límite completo diverge o no tiene límite). Luego, la idea es suponer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|} = \ell$$

En dicho caso,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)|x| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|} - \ell\right| < \varepsilon$$

Supongamos que dicho δ existe. Entonces $|\cos\frac{1}{|x|} - \ell| < \varepsilon$ (en el caso $x > 0$). Pero existe $x_0 > 0$ tal que $\frac{1}{|x_0|} = \frac{1}{|x|} + \pi$ si el coseno es mayor o igual a ε, o que $\frac{1}{|x_0|} = 2k\pi$ si es menor a ε. En cualquiera de los dos casos tendremos una contradicción con la desigualdad propuesta después de suponer la existencia de δ (notemos que perfectamente podemos escoger $x_0 < x$. Luego, es claro que no se da la convergencia.

Existencia de la derivada en el problema 4

Sabemos que las derivadas parciales en los puntos de la forma $(0, y)$ son nulas. Luego, el candidato natural para ser el gradiente es $(0, 0)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 \le \lim_{(h,k)\to(0,y)} \frac{\|f(h,k) - f(0,y) - \nabla f(0,y)\|}{\|(h,k)\|} &= \lim_{(h,k)\to(0,y)} \frac{|h^{4/3}\sin\frac{k}{h}|}{\|(h,k)\|} \\ &\le \lim_{(h,k)\to(0,y)} \frac{h^{4/3}}{|h|} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,y)} h^{1/3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde se concluye que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.