# Problema de Punto Fijo

Prof. Michal Kowalczyk
Prof. Aux: Guillermo Campos y Darío Valdebenito
28 de marzo de 2008

## Problema:

Sea $L : R^n \rightarrow R^n$ una función lineal continua tal que $\|L\| < 1$ y considerando $I$ como el operador identidad

1. - Pruebe que $I - L$ es invertible y que la inversa viene dada por la seria de Neumann :

$$(I - L)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} L^k$$

2. - Pruebe que :

$$\left\|(I - L)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$$

3.- Pruebe usando el teorema de punto fijo de Banach que la ecuación $x - Lx = a$ tiene una única solución para todo $a$

Indicación : $\|L(x)\| \leq \|L\| \cdot \|x\|$

## Solución:

1. - Para comenzar llamemos a la inversa $B$ y notemos que :

$$B = (I - L)^{-1} \Rightarrow (I - L)B = I \Rightarrow B = LB + I$$

es decir $B$ es punto fijo de la funcion

$$A(s) := Ls + I, \text{con } A\!: M_{nn}(R) \rightarrow M_{nn}(R)$$

¿Es este punto único? Si.

En efecto, sean $s_1, s_2 \in M_{nn}$ :

$$\|A(s_1) - A(s_2)\| = \|Ls_1 + I - (Ls_2 + I)\| = \|L(s_1 - s_2)\| \leq \|L\| \cdot \|s_1 - s_2\| < \|s_1 - s_2\|$$

Luego A es contractante y por Teorema del Punto Fijo de Banach el punto fijo existe y es único. Notemos que el teorema puede usarse, pues como se vio en Algebra Lineal $M_{nn}(R) \cong R^{n^2}$

Del mismo modo, suponiendo que $(I - L)$ es invertible, podemos decir que :

$$B = LB + I \Rightarrow B - LB = I \Rightarrow (I - L)B = I \Rightarrow B = (I - L)^{-1}$$

Como el mismo teorema indica, para llegar al punto fijo, basta tomar la sucesión dada por $B_{k+1} = A(B_k)$ para $k \geq 0$ y $B_0 = I$

Por inducción probaremos que $B_k = \sum_{i=0}^{k} L^i$ :

$\cdot\, k = 0$: Trivial

$\cdot\, k \Rightarrow k+1$: $A(B_{k+1}) = LB_k + I = I + L\sum_{i=0}^{k} L^i = I + \sum_{i=1}^{k+1} L^i = \sum_{i=0}^{k+1} L^i$

Por convergencia tomamos $k \to \infty$ y queda $B = (I - L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} L^i$

Para la implicancia hacia la izquierda supusimos que la función era invertible, ahora veremos que la función que nos dimos efectivamente es la inversa, es decir, es inversa por ambos lados.

$$(I - L)B = (I - L)\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} L^i = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} L^i - L^{i+1} = I$$

$$B(I - L) = \left(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} L^i\right)(I - L) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} L^i - \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} L^{i+1} = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} L^i - L^{i+1} = I$$

2. - Sabemos que $(I - L)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} L^k$, luego $\left\| (I - L)^{-1} \right\| = \left\| \sum_{K=0}^{\infty} L^k \right\| \leq \sum_{K=0}^{\infty} \left\| L^k \right\| \leq \sum_{K=0}^{\infty} \left\| L \right\|^k$

como $\|L\| < 1$ se tiene que $\sum_{K=0}^{\infty} \|L\|^k = \frac{1}{1 - \|L\|} \Rightarrow \left\| (I - L)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$

3. - Queremos ver que $x - Lx = a$ tiene una unica solución.

Notemos que modificando levemente la ecuación tenemos $x = Lx + a$

Definamos entonces $f(x) := Lx + a$ y veamos que tiene punto fijo.

En efecto sean $x, y \in R^n$,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|Lx + a - Ly - a\| = \|L(x - y)\| \leq \|L\| \cdot \|(x - y)\| < \|(x - y)\|$$

$f$ es contractante y por Teo. Pto Fijo de Banach tiene un unico punto fijo.

es decir, $x = Lx + a$, para un unico $x \Rightarrow x - Lx = a$, para un unico $x$

## El Teorema

*Teorema Del Punto Fijo de Banach*:

Sea $f: \Omega \subset R^N \to R^N$ una función contractante. Supongamos además que Ω es cerrado, y que $f(x) \in \Omega$ para todo $x \in \Omega$. Entonces existe un único $\bar{x} \in \Omega$ tal que $\bar{x} = f(\bar{x})$, en otras palabras, f posee un único punto fijo en Ω.

A pesar de ser un teorema increíblemente sencillo de enunciar, el Teorema del Punto Fijo de Banach, es uno de esos teoremas que cautiva poderosamente la atención de matemáticos y gente quizás no tan interesada en matemáticas, pero que por algún motivo llega a conocerlo. ¿Por qué? Es simple, el Teorema de Punto Fijo de Banach hace algo que muchos quieren pero que pocos pueden:

- Demuestra existencia
- Demuestra unicidad
- Provee un método para encontrar lo que se busca
- Entrega una aproximación de que tan cerca se está, y que por lo demás es muy buena
- Tiene una de las formas coloquiales de ser enunciado más llamativas y asequibles

Además de esto, en su forma original el Teorema esta construido para espacios completos, y por lo tanto no se restringe a conjuntos como $R^N$, si no que aborda espacios más generales como espacios de funciones. Sin ir más lejos, el Teorema de Cauchy-Lipchitz-Picard que demuestra la existencia de una única solución para algunas EDOs es una consecuencia del Teorema del Punto Fijo de Banach.

*La versión original del teorema*

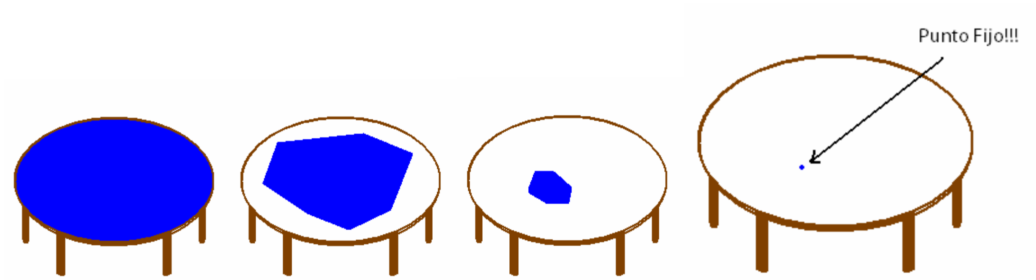
Sea $(E, d)$ un espacio metrico completo y sea $f: E \to E$ una función contractante. Entonces existe un único $\bar{x} \in E$ tal que $\bar{x} = f(\bar{x})$, ademas para todo $x \in E$, la sucesión dada por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge hacia $\bar{x}$ con $d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0))$.

*NOTA: Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge, un espacio es métrico, si tiene una métrica (una distancia, que no tiene porque ser una norma), si la métrica es una norma, el espacio métrico completo se dice un espacio de Banach.*

*El Teorema enunciado para cualquier mortal*!

Supongamos que tenemos una mesa y un mantel que le calza perfecto, o sea que no cae por el costado. Si agarramos el mantel, lo arrugamos, lo tiramos arriba de la mesa, le pasamos una aplanadora por arriba, y repetimos (arrugando siempre igual) hasta el infinito, uno y solo un punto del mantel quedará exactamente en su posición original.

Gráficamente:




Este tipo de representación da el "chispazo" de porque la función se dice contractante, además cualquier persona por más que no tenga ningún conocimiento en matemáticas puede entenderla.

Para más información sobre el teorema y el autor:

http://es.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach (español)
http://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach (inglés)

/* Wikipedia en español es muy incompleta, así que si en verdad quieren informarse sobre el matemático polaco Stefan Banach y su obra, recomiendo leer el articulo en inglés. (Además en el futuro, va a ser común que se enfrenten a un texto en inglés así que un poco de training nunca está demás)*/