Problemas de frontera

Prof. Michal Kowalczyk
Prof. Aux: Guillermo Campos y Darío Valdebenito

21 de marzo de 2008

El propósito de esta guía es probar que si se tienen hipótesis adecuadas, entonces la función $\text{Fr} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tiene un comportamiento bastante predecible, mientras que si no se cumplen se producen fenómenos inesperados.

Problema 1

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^C)$.

Problema 2

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Pruebe que $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(A)$.

Problema 3

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado. Pruebe que $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(A)$.

Problema 4

Dé un ejemplo de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ que no sea cerrado ni abierto y en el que $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) \neq \text{Fr}(A)$

Soluciones

Problema 1

$\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{int}(A) = \text{Adh}(A) \cap (\text{int}(A))^C = (\text{int}(A^C))^C \cap \text{Adh}(A^C) = \text{Adh}(A^C) \setminus \text{int}(A^C) = \text{Fr}(A^C)$.

Problema 2

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Adh}(\text{Fr}(A)) \setminus \text{int}(\text{Fr}(A))$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \text{Adh}(\text{Fr}(A)) &= \text{Adh}(\text{Adh}(A) \setminus \text{int}(A)) \\ &= \text{Adh}(\text{Adh}(A) \setminus A) \\ &= \text{Adh}(\text{Adh}(A) \cap A^C) \end{aligned}$$

pero A^C es cerrado; luego, la intersección también es cerrada (para probarlo, usen complemento y el problema 1b de la clase auxiliar), y se concluye que $\text{Adh}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(A)$. Vean el P11 de la guía de ejercicios para que tengamos $\text{int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$. De aquí se concluye que $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(A)$.

Problema 3

Usando los dos problemas anteriores, tenemos que si A es cerrado, entonces A^C es abierto, de donde $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(\text{Fr}(A^C)) = \text{Fr}(A^C) = \text{Fr}(A)$.

Problema 4

Sea $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Entonces $\text{Fr}(B) = [0, 1]$ y $\text{Fr}(\text{Fr}(B)) = \{0, 1\}$. Noten que si A no es abierto ni cerrado, entonces en general no se tiene que $\text{int}(\text{Fr}(A)) = \phi$.

A modo de conclusión, las operaciones $\text{Adh}(\cdot)$ y $(\cdot)^C$ pueden generar hasta 14 conjuntos distintos, incluyendo el conjunto original. Si quieren entretenerse, prueben que este fenómeno se presenta en

$$A = \{1/n : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \left\{ \frac{9}{2} \right\} \cup [5, 6] \cup \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge 7 \leq x < 8\}$$