Topología en $\mathbb{R}^n$ y tópicos en topología en general.

Prof. Michal Kowalczyk
Prof. Aux.: Guillermo Campos y Darío Valdebenito

20 de marzo de 2008

1. Dos problemas

1.1. Intersección finita de abiertos

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de abiertos. Probemos que $A := \bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto. En efecto, sea $x \in A$. Entonces $x \in A_k \forall k$. Para cada k existe ε_k tal que $B(x, \varepsilon_k) \subseteq A_k$. Luego, si $\varepsilon = \min_k \varepsilon_k$, tenemos que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ (pues está incluida en todos los A_k), de donde A es abierto.

Noten que el esquema de la demostración es el mismo exhibido en la clase auxiliar: darnos un punto cualquiera en el conjunto que queremos probar que es abierto, y encontrar un cierto radio (estrictamente positivo) tal que la bola de centro x y radio apropiado está incluida en el conjunto.

Si la intersección es arbitraria ésta no tiene por qué ser abierta. Consideren el caso $A_k = B(0, \frac{1}{k})$. Entonces $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$, que es cerrado.

1.2. Compacidad

Probemos que si A es cerrado y B es compacto, entonces $A \cap B$ es compacto. En efecto, notemos que $A \cap B$ es cerrado, pues A^C y B^C son abiertos; luego, $A^C \cup B^C$ es abierto, y su complemento, $A \cap B$, es cerrado. Como $A \cap B \subseteq B$, entonces $A \cap B$ está acotado por B, que sabemos que es acotado. Luego, $A \cap B$ es compacto.

2. Nociones básicas de topología en general

Sea X un conjunto, y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. τ se dice topología si

- ϕ, $X \in \tau$
- $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$
- A, $B \in \tau \Longrightarrow A \cap B \in \tau$

esto es, τ es estable bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. El par (X, τ) se dice espacio topológico. Ahora, sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$. Entonces f es continua si $f^{-1}(B) = A$, con $B \in \sigma$, $A \in \tau$, i.e. la preimagen de un abierto es un abierto.

Si definimos una topología para un espacio vectorial y ella permite que la suma y la ponderación por escalar sean continuas, entonces hablaremos de un espacio vectorial topológico. Si dotamos al espacio vectorial de una norma, entonces todo abierto será la unión de bolas de radio apropiado (i.e. las bolas formarán una "base" de los abiertos) y hablaremos de un espacio vectorial normado. Si las sucesiones de Cauchy son convergentes y convergen a un elemento en el espacio, hablaremos de un espacio de Banach. Si además la norma proviene de un producto interno, hablaremos de un espacio de Hilbert.

Una topología apropiada tiene enormes consecuencias para todo el trabajo de cálculo que hagamos con el espacio. Por ejemplo, una topología se dice T_2 (o Hausdorff) si, dados dos puntos distintos, existen abiertos que los contienen y su intersección es vacía. Esta sencilla propiedad tiene enormes consecuencias, siendo la principal que si una sucesión tiene límite, entonces éste es único. Si un espacio no es T_2, esto por lo general significa que no tiene suficientes abiertos. A la inversa, si un espacio tiene muchos abiertos, en general la conexidad será una propiedad difícil. Por ejemplo, si$\tau = \mathcal{P}(X)$, entonces sólo los singleton serán conexos (es fácil probar esto).

La topología es una rama de la matemática muy interesante, aunque también bastante árida. Si les interesa el tema, consideren tomar el curso de Análisis, o al menos leer "Counterexamples in topology" de Steen y Seebach, donde podran encontrar topologías rarísimas. En general no es necesario que sepan estas cosas para pasar el curso, pero es bueno que alguna vez tengan contacto con estos temas que muestran lo denso que ha sido el desarrollo de la matemática moderna, y como muchos resultados que parecen muy naturales en realidad se dan porque tenemos una estructura apropiada para el espacio, y a veces también muchas propiedades son fácilmente generalizables.