CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, JUEVES 19 DE JUNIO, 2008

Problema 0. Dada una matriz A de $n\times n$ simétrica definida positiva, $\vec{a},\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ y $\beta\in\mathbb{R}$. Calcule el mínimo de la función $f(x)=x^TAx+c^Tx$ sobre el conjunto:

$$\mathscr{C}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ a^Tx=\beta\right\}$$

Calcule también el multiplicador de Lagrange λ. Justifique bien que el punto x_0 calculado es el mínimo de esta función en $\mathscr{C}$.
Para el caso particular en que $A=I$, $a=(1,1,...,1)$, $c=\vec{0}$ y $\beta=1$, compare el resultado con el problema anterior. Comente. (Recuerde que si A es definida positiva, ella es invertible y A^{-1} también es definida positiva).

Problema 1. Dado el conjunto

$$\mathscr{C}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ :\ \sum_{i=1}^n x_i\geq 1\right\}$$

y la función

$$f(\vec{x})=||\vec{x}||_2^2$$

Se desea encontrar el punto x_0 que minimiza la función f en el conjunto $\mathscr{C}$. En una primera etapa utilice su intuición y proponga un punto $\vec{x}\in\mathscr{C}$ que usted considere debería ser mínimo de f en $\mathscr{C}$. Luego, intente demostrar que ese punto es mínimo usando las condiciones vistas en clases. Es mínimo local o global?, es único?

Problema 2. Calcule las siguiente integrales:

(i) $\displaystyle\int\int_I x^2\sin(xy)dxdy$; donde $I=[0,\pi]\times[0,1]$

(ii) $\displaystyle\int\int\int_I \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; donde $I=[0,2]\times[0,1]\times[-1,4]$

(iii) $\displaystyle\int\int_S (2\sqrt{x}-3y^2)dydx$; donde $S=\{0\leq x\leq 1; x^2\leq y\leq\sqrt[4]{x}\}$

(iv) $\displaystyle\int\int\int_S zdzdydx$; donde $S=\left\{x,y,z\geq 0;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}\leq 1\right\}$

(v) $\displaystyle\int_2^4\int_{4/x}^{(20-4x)/(8-x)}(4y-y^2)dydx$

(vi) $\displaystyle\int\int\int_C \frac{xz^3}{y^2-1}dxdydz$; sobre $C=\left\{x,y,z\geq 0;\ x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$

(vii) $\displaystyle\int\int_C e^{y^3}dxdy$; donde C es la superficie limitada por: $x=0,\ y=1,\ y=\sqrt{x}$

Problema 3. Hallar el area de la región plana R situada en el plano OXY debajo de la parábola $4x-x^2$, encima del eje $y=0$ y a la derecha de la recta $y=6-3x$

Problema 4. Hallar el vollumen del cuerpo sólido S que está debajo del paraboloide de ecuación $z=1-x^2-y^2$ y por encima del plano $z=1-y$

Problema 5. Area, volumen y medida de la bola de radio r ($\mathscr{B}(0,r)$) en $\mathbb{R}^n$. Considere las respectivas "medidas"de la bola en $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$... por las conocidas, $2r, \pi r^2, \frac{4}{3}\pi r^3, \ldots$. La idea del problema es probar que la "medida.º "volumen en n dimensiones"de $\mathscr{B}(0,r)$, es $C_n r^n$. Donde C_n es una constante que no depende de r. Para ello use inducción.