CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, MIÉRCOLES 11 DE JUNIO, 2007

Problema 1. Si $f : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ es una función posiiva, acotada en $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^n$, que es integrable en $\mathscr{R}$, entonces $\sqrt{f}$ también es integrable en $\mathscr{R}$.

Problema 2. Sean $f, g : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones, acotadas en el rectángulo compacto $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^n$, tales que, para ciertos puntos dados $a_1, a_2, ..., a_N \in \mathscr{R}$, es:

$$\begin{cases} f(x) &= g(x) \quad \text{si} \quad x \in \mathscr{R} - \{a_1, a_2, ..., a_N\} \\ f(x) &\neq g(x) \quad \text{si} \quad x = a_1, ..., a_N \end{cases}$$

Pruebe que si f es integrable en $\mathscr{R}$, entonces también lo es g y que se verifica que $\int_{\mathscr{R}} f = \int_{\mathscr{R}} g$

Problema 3. Sea $f : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en el rectángulo compacto $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $f(x) \geq 0$ en $\mathscr{R}$, integrable en $\mathscr{R}$ y además f es contínua en un punto $a \in \mathscr{R}$ donde $f(a) > 0$, entonces $\int_{\mathscr{R}} f > 0$

Problema 4. Sea $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Una función acotada $\varphi : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ se dice **simple**, si existe una partición $P = \{R_1, ...R_N\}$ de $\mathscr{R}$ tal que φ es constante en cada R_i. Pruebe que:

- Si φ es simple en $\mathscr{R}$, entonces es integrable en $\mathscr{R}$ y se verifica que:

$$\int_{\mathscr{R}} \varphi = \sum_{i=1}^{N} C_i Vol(R_i)$$

- Para cualquiera que sea la función acotada $f : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$, se tiene:

$$\underline{\int}_{\mathscr{R}} f = \sup\{\underline{\int}_{\mathscr{R}} \varphi \,:\, \varphi \leq f,\, \varphi \text{es simple en } \mathscr{R}\}$$

$$\overline{\int}_{\mathscr{R}} f = \sup\{\overline{\int}_{\mathscr{R}} \varphi \,:\, \varphi \geq f,\, \varphi \text{es simple en } \mathscr{R}\}$$

Problema 5. Pruebe que si $D \subset \mathbb{R}^p$ es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^p$ y $A \subset \mathbb{R}^q$ es un conjunto acotado, entonces $D \times A$ es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^{p+q}$.

Problema 6. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto que forman los puntos del rectángulo $[1,0]^n \subset \mathbb{R}^n$ que tienen todas sus coordenadas racionales, esto es, $C = [0,1]^n \bigcap \mathbb{Q}^n$. Pruebe que C no tiene medida nula.

Problema 7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1, pruebe que si C es un conjunto cerrado de medida nula contenido en A, entonces $\varphi(C)$ también es un conjunto de medida nula.