Clase Auxiliar N°9: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Thomas Capelle - Emilio Vilches - Nicolás Hernández

29 de Mayo de 2008

Definición. [*Funciones Convexas.*]
Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega \quad \forall x, y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Si Ω es un conjunto convexo, una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, se dice *convexa* si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

P1. Sea Ω un conjunto abierto y convexo, y sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en Ω.

a) Sea $\lambda \in (0,1)$, pruebe que f es convexa si y sólo si $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y)$ $\forall x, y \in \Omega$.

b) Pruebe que f es convexa si y sólo si $(\nabla f(x) - \nabla f(y))(x-y) \geq 0$ $\forall x, y \in \Omega$.

c) Si f es convexa y $x_0 \in \Omega$ un punto crítico de f, pruebe que f tiene un mínimo absoluto en Ω.

P2. Sea $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$. Demostrar que f es convexa.
Indicación: $\forall \lambda \in [0,1]$ $|\lambda x_i + (1-\lambda) y_i|^p \leq \lambda |x_i|^p + (1-\lambda)|y_i|^p$

P3. Sea $p > 1$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ se define la norma p de x como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Dado $a \in \mathbb{R}^n$ demostrar que

$$\|a\|_q = \text{máx}\{a \cdot x \colon \|x\|_p = 1\}$$

P4. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $M = \{(x,y,z)\colon x + y + z = 1\}$, demostrar que f tiene un mínimo absoluto sobre M y encontrar el valor de éste.

P5. Sean $a, b, c > 0$ demostrar

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$$

Indicación: Considere $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ para $x, y, z > 0$.

P6. Dada la sección cónica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, donde $A > 0$ y $B^2 < AC$. Si M denota la distancia desde el origen al punto mas lejano de la cónica. Mostrar que

$$M^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2(AC - B^2)}$$