

# Clase Auxiliar N°5: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel del Pino  
Auxiliares: Thomas Capelle - Emilio Vilches - Nicolás Hernández

17 de Abril de 2008

**P1.** Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva de  $g$ .

a) Determinar todas las funciones  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , soluciones de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$g(y) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

utilizando las nuevas coordenadas  $u$  y  $v$  definidas por:

$$x = u + h(v) \quad y = v$$

b) Utilizar el resultado anterior para resolver:

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 + 1) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

**P2.** Sean  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diferenciables. se define

$$z(u, v) = \exp(f^2(u, v)g(u, v))$$

a) Determine las derivadas parciales de  $z$ , ¿es  $z$  diferenciable?.

b) Si  $f(u, v) = \sqrt{uv}$  y  $g(u, v) = \frac{1}{v}$ . Compruebe la fórmula obtenida en la parte (a).

**P3.** Sean  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables. Se define la función:

$$f(x, y) = x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + xyh\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right)$$

Demuestre que:  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ .

**P4.** Sean  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diferenciables.

a) Si  $\mu(x, y) = f(x, y, \mu(x, y))$  encuentre  $\nabla \mu(x, y)$ .

b) Aplique la formula anterior a  $f(x, y, z) = x^y$ .

**P5.** Suponga que  $u(\tau, x)$  satisface  $\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . sobre una curva donde la variable  $x$  se escribe como una función diferenciable de  $\tau$ , para la cual:

$$\frac{dx}{d\tau} = u(\tau, x)$$

Pruebe entonces que  $u(\tau, x(\tau))$  es constante.

**P6.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones de variable real, derivables en  $\mathbb{R}$ . Se define la función:

$$z(x, y) = x^2 y f(u) + xy^2 g(v)$$

con  $u = \frac{x}{y}$  y  $v = \frac{y}{x}$ , Calcule:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$